This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

Geometry (Plane)
I.C.

VERHANDELING

OVER DE

MEETKUNDIGE BEPALINGEN,

DOOR

J. F. L. SCHRÖDER,

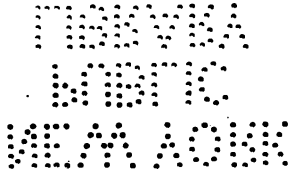
HOOGLEERAAR TE UTRECHT.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

TWEEDE, ZEER VERMEERDERDE UITGAAF.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

TE AMSTERDAM, BIJ
C. G. SULPKE.
1841.



VOORBERIGT.

De verhandeling over de Meetkundige bepalingen, waarvan hier eene nieuwe uitgaaf verschijnt, werd in 1835 door de eerste klasse van het Koninklijk Nederlandsch Instituut waardig geoordeeld, om door haar uitgegeven te worden. Daar dezelve reeds sedert eenige jaren uitverkocht was, heb ik eene nieuwe uitgaaf noodig geoordeeld. De beginselen en stellingen zijn daarin onveranderd gebleven, doch heb ik sommige nog verder opgehelderd, en bijvoegselen tot dezelve gemaakt, welke derzelver toepassing nader aanwijzen — vooral, omdat ik in mijne wiskundige lessen van deze verhandeling gebruik maak. Ook heeft, in het laatste gedeelte, de rangschikking eenige veranderingen ondergaan, terwijl de aanmerkingen, in de vorige uitgaaf achter de verhandeling geplaatst, in de verhandeling zelve zijn opgenomen.

Het zou mij hoogst aangenaam geweest zijn, indien kundige en onpartijdige Wiskundigen en Wijsgee-

geeren van ons land mij hunne aanmerkingen op deze verhandeling medegedeeld hadden. Ik zou dezelve voorzeker, ook wanneer zij ongunſtig, doch gegrond, geweest waren, met dank aangenomen, en daarvan het meest nuttige gebruik ter verbetering van mijn werk bij deze nieuwe uitgaaf gemaakt hebben.

Zoodanig een genoegen heeft mij niet mogen te beurt vallen. Mijne kleinere en grootere uitgegevene verhandelingen en werken, zijn, zoo veel ik weet, in geen onzer periodieke tijdſchriften of andere werken beoordeeld. Het is waar, van de tegenwoordige verhandeling zijn twee beoordeelingen verſchenen, maar uit geene van dezelve heb ik iets ter verbetering kunnen leeren. De eerſte beoordeeling, geplaatſt in een onzer geleerde tijdſchriften, is wel niet ongunſtig, maar zoodanig, dat men onzeker is, of de beoordeelaar de Wiskunde en Wijsbegeerte al dan niet ooit beoefend heeft; — hoewel hij met de ſtelling begint: „Nieuws hebben wij in deze verhandeling niet gevonden.” *Daar ik niet weet, dat datgene, wat ik in dit werk getracht heb aan te wijzen, en te ontwikkelen, in eenig werk van eenen anderen voorkomt, moet ik dus deze ſtelling van den beoordeelaar voor zoodanig eene houden, waardoor men den ſchijn tracht aan te nemen, veel, en meer dan andere te weten — terwijl men niets weet. Dit is een weinig belagchelijk. Indien mijn beſluit onjuist is, dan hoop ik, dat ZEd. mij te-*

dat

regt wijze, en mij bij voorbeeld aantoone, waar hij dan toch al datgene, wat in mijne verhandeling voorkomt, gevonden heeft.

Uitvoeriger, vollediger en sterker, maar ook des te ongunstiger is de beoordeeling van mijn werk door Professor DE GELDER *in deszelfs geschrift: Bedenkingen tegen de verhandeling over de meetkundige bepalingen van den Hoogleeraar* J. F. L. SCHRÖDER, *door* JACOB DE GELDER, *Hoogleeraar te Leiden, met het motto:* Amicus Plato, sed magis amica veritas (*Plato is mijn vriend, maar nog meer is de waarheid mijne vriendin*).

Ik heb daarop geantwoord in mijne verhandeling, getiteld: Bijdrage tot de beschouwing van de waarheid der menschelijke kennis 1832—1833, *welke verhandeling de goedkeuring der derde klasse van het Koninglijk-Nederlandsch instituut heeft mogen ontvangen, en door haar is uitgegeven* 1836, *uitmakende het vijfde deel van hare gedenkschriften in de hedendaagsche taal. Dewijl deze verhandeling, over de theoretische wijsbegeerte handelende, door weinige van onze landgenooten zal gelezen worden, heb ik het noodig en doelmatig geoordeeld, dit antwoord, aldaar op bl.* 519 *tot* 524 *voorkomende, hier mede te deelen. Hetzelve is het volgende:*

Ik heb in de gemelde Verhandeling getracht, de grondvoorstellingen der Meetkunde op te sporen, en daarmit de

de overige af te leiden. Deze geheel synthetische weg in de bepalingen is veelal afwijkende van den gewonen weg. Het was eene eerste proef, welke zeer gebrekkig kon zijn, doch ik meende ook daarom op de toegevendheid van bevoegde beoordeelaars te mogen rekenen, bijaldien dezelve niet geheel als mislukt kon beschouwd worden.

Geenzins ben ik zoodanig ingenomen met hetgene ik geschreven heb, dat ik zou meenen, dat daarop geene gegronde en gewigtige aanmerkingen konden gemaakt worden. Integendeel wensch ik dezelve te ontvangen, ten einde des te meer in staat gesteld te worden, het gebrekkige te verbeteren. Aangenaam zal het mij dus zijn, dat deskundige zich wel willen verledigen, om dit onderwerp en deze verhandeling nader te onderzoeken, en mij hunne aanmerkingen, hetzij schriftelijk of door den druk, mede te deelen. Hun grondig onderzoek, al is het besluit uit hetzelve voor mijn werk niet gunstig, zal mijnen opregten dank verdienen, dewijl de waarheid bij elken braven man oneindig meer waarde moet hebben, dan hetgene de eigenliefde streelt. Door *deskundigen* versta ik niet diegenen, welke alleen de wiskunde beoefend hebben, maar zoodanigen, *die ook tevens eenigzins in de wijsbegeerte geoefend zijn*, ten minste naauwkeurige voorstellingen hebben van die wijsgeerige begrippen, welke hier in aanmerking komen, en die in staat zijn *naauwkeurig en bondig te redeneren*, hetwelk nog iets anders is, dan een wiskundig theorema te kunnen bewijzen. Dit ten minste kan men te regt als een vereischte stellen, om over deze zaak eenigzins juist te oordeelen.

Tegen deze Verhandeling is het gemelde werk van den

den Hoogleeraar DE GELDER verschenen, waarin eene menigte van bedenkingen, of liever overal wedersprak, gerigt tegen mijne stellingen en bepalingen, voorkomen. Ik zou mij zeer verpligt achten aan Zijn Hooggeleerde, indien mijne Verhandeling in dit werk grondig ondersocht was, omdat ik dan daaruit zeer veel voordeel zou kunnen trekken, om mijne denkbeelden te verbeteren en te volmaken. Doch dit is het geval niet. Onder de veelvuldige bedenkingen, wederspraken, scherpe veroordeelingen van mijne stellingen, heb ik *niets* gevonden, hetwelk naar mijn oordeel een genoegzamen grond zoû opleveren, om iets wezenlijks in mijne verhandeling te veranderen. Dit schijnt wondersprenkig te zijn, daar toch de Hoogleeraar DE GELDER, gedurende een tijdvak van veertig jaren, zoo vele leerboeken en verhandelingen over de Wiskunde vervaardigd, en dus over dat onderwerp veelvuldig gedacht heeft.

Maar Z. Hooggeleerde moge in getallen, figuren en formulen nog zoo verre gevorderd zijn, de overige, zoo even door mij opgenoemde, vereischten, om over het onderwerp mijner verhandeling juist te oordeelen, bezit Z. Hooggeleerde, zoo veel ik namelijk uit dit zijn werk moet besluiten, in eenen al te geringen grad, en ik twijfel niet of elk kundig, opmerkzaam, onpartijdig lezer van dit werk zal het hierin volkomen met mij één zijn. Intusschen, indien ik bij dit alles ten minste nog de waarheidsliefde, in de echte beteekenis van het woord, zag, en de gepastheid van het motto der tegenbedenking:

Amicus Plato, sed magis amica veritas,

zou-

zouden ook die welmeenende pogingen, om de waarheid te bevorderen, mijne achting verdienen, want

Ut desint vires, tamen est laudanda voluntas.

Maar het blijkt maar al te duidelijk en te veelvuldig, dat waarlijk niet de waarheidsliefde des Hoogleeraars pen bestuurd heeft, maar een verregaand misnoegen daarover, dat mijne bepalingen en gronden niet overeenstemden met die van Z. Hooggeleerde, *welke hij*, gelijk hij in het voorberigt zegt, *na herhaald en rijp nadenken voor meer dan veertig jaren uit den aart van het onderwerp zelf had afgeleid.* Ja hij schijnt te veronderstellen, dat ik hem en zijne leerboeken door mijne verhandeling had willen aanvallen. *Indien hij dit veronderstelt, dwaalt hij grootelijks.* Ik durf opregtelijk verzekeren, dat ik, bij het vervaardigen van mijne verhandeling, op zijne bepalingen en gronden geen acht geslagen heb, en wel, zoo ik meen, *om goede redenen* zulks niet gedaan heb.

Uit dit misnoegen mag dan ook ontstaan zijn die scherpe bittere toon tegen mijn werk, welke in de geheele verhandeling heerscht, ja eene wijze van te berispen of te scheiden, welke onder *beschaafde* geleerden, bij een zuiver wetenschappelijk onderwerp, nimmer behoort plaats te hebben. Zeer weinig is, volgens het oordeel van Z. Hooggeleerde, in mijne verhandeling, hetgene goedkeuring zou verdienen; al het overige is verkeerd, zoo wel stellingen als redeneringen, ja men vindt daarin belagchelijke dingen en onzin. Uit de veelvuldige veroordeelingen, welke deze verhandeling en mijn persoon als schrijver ontvangt, kies ik slechts eenige, welke meer betrekking tot de geheele verhandeling, dan tot enkele bepalingen hebben.

Op

Op bladz. 45 zegt Z. Hooggel. „ of de schrijver nu „ in eenig opzigt zijn doel bereikt heeft? Of hij, door „ een verkeerd gezigtpunt aan te nemen, en zelfs in „ veelerlei opzigte eene geheel vreemde taal te spreken, „ zijn voorgesteld doel niet regtstreeks heeft tegenge„ werkt, zullen wij in deze tweede afdeeling opzette„ lijk nagaan, en aantoonen, dat de schrijver veeleer „ heeft medegewerkt, om door het voorstellen van on„ verstaanbare bepalingen, duisterheid over de klaarblij„ kelijkste waarheden te verspreiden."

En bladz. 131.

„ Wij moeten den schrijver hier den verdienden lof „ toezwaaijen, dat hij in zijne wijze van zien, mees„ terlijk zijne taak volbragt, en zich zelven in het op„ stellen zijner bepalingen is gelijk gebleven. Ongeluk„ kig is het, dat zij alle zoo onmeetkunstig en gebrek„ kig zijn uitgevallen, en dat daartoe zoo vele vreemde „ woorden en denkbeelden behulpzaam hebben moeten „ zijn, om van dit gebrekkige *een schijnbaar zamen„ hangend geheel* te maken. Dit alles is het gevolg „ daarvan, *dat de schrijver de meetkunst op een geheel „ vreemd gebied heeft overgebragt ens.*"

En bladz. 142.

„ De schrijver, die overal met de verwarring der be„ grippen in de weer is, verwart zelfs de begrippen van „ de eenvoudigste figuur, wanneer hij de figuur van eenen „ hoek, in haar geheel genomen, verwart met datgene, „ wat den hoek voortbrengt, namelijk de onbepaalde lij„ nen, die hem insluiten, en alzoo verwart hij de figuren „ met hare grenzen. Is dat nu de wijsbegeerte, die de

„ meet-

„ meetkunst moet voorlichten? dan behoede de hemel
„ ons voor zulke onwijsgeerige redeneringen, door wel-
„ ke de wiskundige klaarblijklijkheid uit het gebied der
„ meetkunst geheel en al zou worden verbannen. Wan-
„ neer men zoo mogt redeneren, als de schrijver in de
„ gevolgtrekkingen zijner bepalingen redeneert, dan zou
„ de weg worden opengesteld voor de belagchelijkste
„ gevolgtrekkingen enz."

Ik heb vooral getracht in de verhandeling over de Meetkundige bepalingen duidelijk te zijn voor elk een, die eenigzins met het onderwerp bekend is, en kon zulk ook zijn, dewijl het onderwerp daartoe zeer geschikt is. Indien ik dus in die verhandeling onduidelijk geweest ben, dan ben ik in den hoogsten graad onbekwaam, om mijne denkbeelden aan anderen duidelijk mede te deelen. Ook hierin word ik ten sterkste op meerdere plaatsen door Z. Hooggeleerde veroordeeld, en ten slot zegt hij daarvan op bl. 144.

„ Wij laten voor het overige de waarde van die soort
„ van beschouwing aan hare plaats: maar, wanneer men
„ *na veel inspanning en met den besten wil* leest en her-
„ leest, en het steeds duisterer wordt, dan begint men
„ aan de waarheid van de voorgestelde zaak te twijfelen."

Eindelijk word ik ook als een, voor de wetenschap gevaarlijk, mensch voorgesteld, voor wiens leer zich de onervaren jeugd moet wachten, die de wetenschap bederft, en met zoodanig eene vermaning eindigt dan ook dit werk van Z. Hooggel.: „ Zijne verhandeling" zegt hij (bl. 144.) „ heeft ons in de nood-
„ zakelijkheid gebragt, om onze gronden in derzelver

„ge-

„ geheel voor onze vaderlandſche meetkunſtenaars open
„ te leggen, en den onkundigen lezer vrij te waren te-
„ gen de verkeerde begrippen, welke de ſchrijver in
„ zijne verhandeling heeft voorgeſteld."

Dit hoog misnoegen, hetwelk Z. Hooggeleerde bij het vervaardigen van deze bedenkingen vervulde, heeft dan ook *zonderbare* aanmerkingen en redeneringen voortgebragt, welke men van eenen Hoogleeraar in die wetenſchap, welke veelal *practiſche logica* genoemd wordt, niet zou verwachten. Maar hieruit is dan ook voortgekomen, hetgene, bij de poging om de denkbeelden van anderen te wederleggen, *in den hoogſten graad beriſpelijk is*; — namelijk, er zijn plaatſen redeneringen en beſluiten in deze verhandeling, welke zoodanig zijn, dat men genoodzaakt is, het volgende desjunctive oordeel te vellen, *dat één van beiden waar is, of Z. Hooggeleerde heeft door hartstogten, of door andere prikkels aangedaan, niet regt geweten, wat hij ſchreef, en wat hij in mijne verhandeling las*; — *of hij heeft zich aan kwade trouw ſchuldig gemaakt*, dat is *opzettelijk onwaarheid* gezegd, ten einde deze onwaarheid voordeelig te kunnen gebruiken, om mijne verhandeling in een verachtelijk licht te plaatsen. Dit geldt in het bijzonder van die plaatsen, waar mij wordt toegeſchreven, iets gezegd te hebben, hetgene ik in de verhandeling (gelijk aan elk een moet blijkbaar zijn, die dezelve leest) niet gezegd heb, en omgekeerd, iets niet gezegd, verklaard of bewezen te hebben, hetgene ik gezegd, verklaard en bewezen heb.

Ja, wat meer is, *met zoodanig iets begint meſt de verhandeling en daarop ſteunt de eerſte aanval, welke op*

mij

mij geschiedt. De eerste periode van het werk, dat is, *de eerste periode der Inleiding* (bl. 1.) bevat eene *openbare onwaarheid*, en dat zij eene onwaarheid bevat, *kan den Heer* DE GELDER *niet onbekend zijn*, al heeft hij mijne verhandeling ook slechts ter loops gelezen. *De tweede Periode* bevat wederom *zoodanig eene openbare onwaarheid*, en hieruit wordt dan vervolgens een valsch besluit afgeleid, geschikt, om mijne verhandeling dade lijk in een ongunstig licht te plaatsen. Dit is een voorbeeld, waarbij ik niet weinig andere kan voegen, en zelfs ook zoodanige, (zoo als op bl. 94. 114. enz.) welke van eenen nog veel ergeren aard zijn.

Op die wijze kan zeker het beste werk als verkeerd, belagchelijk, ja als onzin voorgesteld worden. Doch *welk braaf man zal zoodanige lage wapens gebruiken?*

Ik wil intusschen gaarne geloven, dat soortgelijke blijkbare onwaarheden, in het werk van den Hoogleeraar DE GELDER voorkomende, niet juist uit kwade trouw, maar deels uit onkunde en onbekwaamheid, deels uit drift, overijling, zucht om te berispen of uit andere oorzaken ontstaan zijn. Immers, indien hier kwade trouw gewerkt had, zou zich Z. Hooggeleerde bij eene natie, welke op goede trouw nog prijs stelt, en in de oogen van zijne achtingwaardige ambtgenooten, *zeer verachtelijk* vertoonen.

Het doet mij overigens leed, dat ik dit geschrift met het hoogste regt moet plaatsen onder het getal van diegenen, waarvan ik op bladz. 483 gesproken heb. Was toch Z. Hooggeleerde meer indachtig geweest aan de beteekenis en kracht van het motto zijner verhandeling zelve, hij zou dan voorzeker zoodanig iets niet aan het pu-

publiek vertoond hebben. Hij veroorlove mij, hem zelven met allen ernst te vragen, of hij meent, *dat dit werk hem als Geleerde, en als Mensch tot eer kan verſtrekken?* Hij zelf oordeele hierover met die onpartijdigheid, naauwkeurigheid en bedaardheid van geest, welke bij het onderzoek van wetenſchappelijke onderwerpen, en vooral bij het onderzoek van onze eigene waarde, en het zedelijke onzer handelingen, noodzakelijk is.

Ik was eerst voornemens, ten opzigte van deze zaak, geheel het ſtilzwijgen te bewaren, doch bijzondere redenen maakten het raadzaam, om daarvan eenige melding te maken, en wel in eene aanmerking tot deze mijne verhandeling, waarin ik van eenige ſtellingen, in de verhandeling over de meetkundige bepalingen voorkomende, gebruik maak.

Voor het overige zou het *hier* althans niet gepast zijn, uitvoeriger van dit werk te ſpreken. Het zal mij aangenaam zijn, indien ik zulks niet elders behoef te doen. *Doch, indien ik daartoe genoodzaakt word, zal ik voldoende bewijzen van het hier geſtelde geven.* In alle gevallen hoop en wensch ik mij in deze zaak zoodanig te zullen gedragen, en gedragen te hebben, als vereischt wordt van hem, die naar de eer ſtreeft, van *vriend der waarheid* te regt genoemd te worden; eene eer, die toch veel grooter is, dan diegene, welke beſtaat in het gunſtig oordeel van anderen over onze *geleerdheid, ſchranderheid, ſcherpzinnigheid* enz.

Tot dus verre de aanmerking. Thans na zes jaren, en bij deze tweede uitgave, voeg ik daarbij nog het volgende:

Wanneer men op zulk eene wijze, en met zoodanige wa-

wapens, als hier geſchiedt is, wordt aangevallen, en tot dien aanval niet de minſte regtmatige aanleiding (*) heeft gegeven; — wanneer men geene van deze veelvuldige en harde berispingen verdient, en dit zoo blijkbaar is, dat men ten volle mag vertrouwen, dat elk kundige en onpartijdige man, die zich de moeite geeft, om de verhandeling met die beoordeeling te vergelijken, zulks zal toeſtemmen, — dan is zoodanig een antwoord, als ik hier gegeven heb, als zeer gematigd te beſchouwen.

Profesſor DE GELDER *heeft hierop niet geantwoord, en dit moet, naar mijn oordeel, ſterk afgekeurd worden. Eer en pligt eischten een, hetzij* wederleggend *of* toeſtemmend, *antwoord. Hij had het door mij hier geſtelde en naauwkeurig genoeg, volgens de bladzijden aangewezene, moeten wederleggen, en, zulks noodig oordeelende, van mij verlangd hebben, om nader het aan-*

(*) Het is niet onwaarſchijnlijk, dat de eerſte aanleiding daartoe gegeven heeft, dat wij verſchillende ſchijnen te denken, omtrent de beantwoording der vraag: *Wat behoort er toe, opdat een, door het Gouvernement bij eede aangeſtelde leeraar, en examinator als zoodanig kan gezegd worden, een eerlijk man te zijn, die getrouw is aan zijnen eed, aan den ſtaat en aan de wetenſchappen.* Het antwoord is, dunkt mij, buiten twijfel dit: *Het eerſte vereischte is, dat hij nooit eene verklaring geve, welke hij weet, dat onwaar is.* Al wie aan dit vereischte niet voldoet, kan toch wel op achting niet aanſpraak maken. Hoe veel nadeel zoodanig een meenedig man aan het vaderland aanbrengt, dat blijkt van zelve, en zal wel geen nader betoog noodig hebben.

aangewezene te bewijzen. Voorzeker was eene grondige wederlegging van mijn antwoord niet mogelijk, en ik durf ſtellen, dat Profeſſor DE GELDER *zelf hierin met mij overeenſtemt. Door ſchelden, magtſpreuken, belagchelijke en pedantiſche grootſpraak, door het verdraaijen der woorden, door valſche verklaringen, die men zelf weet dat valſch zijn, door kinderachtige redenering enz., kan men zich zelven wel, gelijk bij dien aanval geſchied is, in een zeer ongunſtig en beſpotelijk licht plaatſen, maar niet het hier geſtelde doel bereiken. Dewijl dus eene bondige en voor hem eervolle wederlegging hier niet mogelijk was, had Profeſſor* DE GELDER *rondborſtig moeten bekennen, gedwaald te hebben, en zijne beſchuldigingen openlijk terugnomen. In ons land heerscht toch, hoop ik, niet zulk eene ſlappe zedekunde, dat men eene openlijke ware bekentenis, van eenen anderen onregt gedaan te hebben,* edelmoedig *zou noemen. Het is immers eene geſtrenge pligt, behoorende tot het* ſuum cuique, *waaraan zich geen eerlijk man mag ontrekken. Men zal toch het teruggeven van geſtolen goederen niet* edelmoedig *noemen. Aan die pligt dient men toch vooral indachtig te zijn, wanneer men voor zijn geſchrift een motto plaatst, hetgene behelst de betuiging,* dat de waarheid onze grootſte vriendin zij. *Zoodanig een motto is alleen paſſende voor hem wien vergezellen:*

Pudor, et Juſtitiae ſoror
Incorrupta Fides, nudaque Veritas.

Men zou mij onregt aandoen, indien men deze verkla-

klaring als eene grootſpraak beſchouwde, die aanwees, dat er op mijn werk geene gegronde aanmerkingen konden gemaakt worden. Het tegendeel is waar. Ik ſtel alleen, dat Profeſſor DE GELDER *zich geheel ongeſchikt vertoond heeft, om de fouten en gebreken, in dat werk voorkomende, te zien. Dit is mij ook daaruit voldoende gebleken, dat hij onjuiste uitdrukkingen en ſtellingen, in de eerſte uitgave dezer verhandeling voorkomende, en waarvan hij voor zijn doel een voordeelig gebruik had kunnen maken, geheel niet opgemerkt, en daarentegen datgene aangevallen heeft, hetgene zich gemakkelijk kon verdedigen.*

En hiermede neem ik afſcheid van Profeſſor DE GELDER. *De ontmoeting is zeer onvriendelijk geweest, en heeft mij des te meer getroffen, daar ik tot dezen tijd toe met geenen geleerden eene onvriendelijke ontmoeting gehad had. Doch mijn geweten zegt mij, dat het mijne ſchuld niet geweest is, en hoewel ik eene ernſtige vermaning, ter bevordering der waarheid, noodig oordeelde, biede ik toch gaarne de hand ter verzoening, en wensch opregtelijk Z. Hooggeleerden den grootſten ſchat toe, welken ik mijzelven toewensch, en welke noodig is, om eens dit leven welgemoed als Christen te verlaten.*

Ik heb gezegd, dat ik geene enkele gegronde aanmerking tegen mijn werk in de gemelde beoordeeling gevonden heb. Ik kan mij hierin vergiſſen, zoodat toch onder die menigte eene voorkomt, welke gegrond is. Wie mij dezelve minzaam aanwijst, zal mij verpligten.

INLEIDING.

Geen voorwerp is uit deszelfs aard meer geſchikt voor eene beſchouwing, welke volkomen voldoet aan de vereischten van een wetenſchappelijk onderzoek, dan de voorſtelling van *getal* en *ruimte*, waarvan de eerſte de grondſlag is der algemeene Wiskunde of Arithmetica, en de andere van dat gedeelte derzelve, hetwelk Meetkunde of Géometrie genoemd wordt.

Immers is ons de voorſtelling der ruimte, en hetgeen onmiddellijk daartoe betrekking heeft, en daarvan alleen afhangt, zoo als afſtand, rigting, lijn, vlak, figuur, meetkundig ligchaam, als 't ware, met ons kenvermogen te gelijk gegeven, en ter verkrijging van kennis aangaande dezelve, behoeven wij de ervaring en het getuigenis der zintuigen en menſchen niet in te roepen. De verbeelding, dit vermogen der vormen,

werkt hier in een vrij veld. Zij ſchept lijnen, hoeken, figuren en ligchamen naar welgevallen, verzinnelijkt de begrippen door beelden, terwijl het verſtand in deze vormen en beelden, hoewel individuën voorſtellende, het algemeene ziet, en kiest hetgeen voor het begrip past. De voorſtelling van *getal* is met andere vermaagſchapte voorſtellingen, zoo als van *eenheid*, *hoeveelheid*, *geheel*, *deelen*, *meten*, enz. gegrond in de natuur van het verſtand. Ook hier werkt de verbeelding in een vrij veld. Zij brengt willekeurige vormen van getallen voort, waaruit het verſtand algemeene regels afleidt; zij verzinnelijkt de begrippen, en zelfs de werkzaamheid van dit vermogen in het redeneren, en de ſoms uit vele leden zamengeſtelde Syllogismen, door eenvoudige teekenen; waardoor de aaneenſchakeling der redeneringen, het overzigt, het ontdekken, het gebruik en het onthouden van algemeene waarheden voor het verſtand en het geheugen gemakkelijker worden.

De zuivere Wiskunde is dus eene wetenſchap, geheel en alleen voortgebragt door de gemeenſchappelijke vrije werking van de verbeeldingskracht en van het verſtand, volgens derzelver wetten; en hare waarheden zijn, gelijk deze wetten en de natuur dezer vermogens, eeuwig en onveranderlijk. Juist daarom kan zij aan de geſtrenge eiſchen der Logica, welke de verſtandswetten en hetgeen volgens dezelve waarheid is, beſchouwt, op eene

meer

meer volkomene wijze voldoen, dan andere wetenſchappen, welke geheel of ten deele op de ervaring berusten; ja, zij is te regt eene practiſche Logica te noemen, wanneer zij wetenſchappelijk zoodanig volmaakt is, als zij volgens haren aard zijn kan. (*a*)

Reeds vroeg heeft de menſchelijke geest het verband der wiskundige waarheden, en de onafhankelijkheid derzelve van de ervaring ingezien, en daarom ook getracht, daarin de hoogſte logiſche eenheid en naauwkeurigheid te brengen. Hoeveel hiervan reeds ten tijde van PLATO gedaan was, blijkt ook uit de hooge achting, welke deze, te regt genoemde *rationale*, wijsgeer voor de Wiskunde toonde, wier beoefening hij, zoo wel door eigene naſporing als door aanmoediging, bevorderde. Men verhaalt, dat de Akademia, waar hij onderwees, tot opſchrift had: „*Niemand trede binnen, die in de Wiskunde onervaren is!*" Hij beſchouwde dus de Wiskunde als eene wetenſchap, voorbereidend voor de Wijsbegeerte, voorzeker niet alleen uit hoofde van de kundigheden, welke zij ons doet verkrijgen, maar voornamelijk, omdat zij ons aan orde en juistheid in de beſchouwing en redenering gewend. Hij toont zulks in het bijzonder aan in zijne beſchouwing van de opvoeding en het onderwijs der jongelingen, beſtemd tot wachters en be-

(*a*) Uitvoeriger is dit ontwikkeld in mijne *Elementa Matheseos*. Pars I. *Prolegomena*, p. 40 en volgende.

beſtuurders van den Staat, waar hij verklaart, dat de beoefening der Arithmetica en Géometrie vooral dienſtig is, om den geest tot de waarheid en tot de kennis van het wezen der dingen op te leiden, en hem geſchikter te maken tot het leeren van alle andere wetenſchappen. (*b*)

Het is waarſchijnlijk, dat het ook de Wiskunde is, welke tot beoefening der Wijsbegeerte aanleiding en opwekking gegeven heeft, en dat, zonder haar, de Wijsbegeerte bij de Grieken nooit een ſijsthematiſchen, ik laat ſtaan een wetenſchappelijken, vorm zou verkregen hebben. „*Ansas philosophiae non habes*," zeide een oud Wijsgeer tot den jongeling, die in de Meetkunde ongeoefend was.

De grootſte Wijsgeeren der oude en nieuwe tijden waren tevens ervaren in de Wiskunde, of wekten althans anderen op tot derzelven beoefening. PYTHAGORAS, PLATO, ARISTOTELES; CARTESIUS, LEIBNITZ, WOLFF, KANT, FRIES en vele andere kunnen ten voorbeelde hiervan dienen. Het was in het bijzonder de beſchouwing van den aard der Wiskunde, welke KANT geleidde tot zijne *Critiek der zuivere Rede*.

Een uitmuntend zamenſtel der élémentaire Meetkunde is ons uit de oudheid overgebleven, hetwelk ook in nieuwere tijden tot leerboek verſtrekt heeft, en

(*b*) *De Republica*. Lib. VII. p. 255, seqq. Ed. Steph.

en waarvan de meeste der tegenwoordige leerboeken navolgingen zijn. Het is dat van EUCLIDES, een Wiskundige van de oude Alexandrijnſche ſchool. Deze gaat uit van de bepaling der Meetkundige voorwerpen, en wel, in het algemeen, van het eenvoudigſte tot het meest zamengeſtelde. Hij bewijst zijne ſtellingen met de grootſte naauwkeurigheid, terwijl hij laat voorafgaan ware ſtellingen, welke hij beſchouwde voor geen bewijs vatbaar te zijn, bekend onder den naam van *postulaten* en *axiomata*. Op deze bepalingen, postulaten en axiomata berust het geheele zamenſtel, hetwelk gewis als een uitmuntend voorbeeld van orde, juistheid en waarheid is te beſchouwen, en ons tevens vertoont den gang en den redeneertrant der oude Griekſche Meetkundigen vóór EUCLIDES, van wier naſporingen hij zich bediende, om zoodanig een geheel te vervaardigen.

Het zijn de Grieken, welke de Meetkunde niet alleen met de belangrijkſte ontdekkingen verrijkt, maar dezelve ook tot eene wetenſchap gevormd hebben. De diepzinnige, naauwkeurige geest der Grieken, die den oorſprong der dingen, de laatſte gronden der waarheid trachtte op te ſporen, vertoont zich zoowel in derzelver Meetkunde als Wijsbegeerte. Indien deze die hulpmiddelen bezat, welke gene bezit, en de verbeelding in beide met gelijke vrijheid kon werkzaam zijn, dan zouden wij van de Grieken een niet minder volmaakt ſtelſel

der Wijsbegeerte, dan der Meetkunde ontvangen hebben.

Intusſchen is deze Euclidiſche weg niet de kortſte, en voor hen, die dezen Griekſchen geest niet hebben, niet altijd gemakkelijk en aangenaam. PTOLOMARUS LAGUS wenschte eenen korteren en meer gemakkelijken weg; en het is zeker, dat velen, vóór en na PTOLOMARUS, hetzelfde wenschten. EUCLIDES echter meende, dat er voor eenen Koning, die de Meetkunde wilde leeren, geen andere weg was, dan die, welken de beste Griekſche Meetkundigen ingeſlagen waren. Vele nieuwere Wiskundigen denken hierover zoodanig niet. Men heeft meetkundige leerboeken vervaardigd voor verſchillende ſtanden, waarbij meer gezien werd op het nut van de toepaſſing der Wiskunde, dan op de vorming van den geest. Men heeft vooral leerboeken vervaardigd voor zoodanigen, bij welke men den naauwkeurigen Griekſchen geest niet kon vooronderſtellen, ten einde hun den weg aangenamer, korter en gemakkelijker te maken. Zulks is niet geheel af te keuren. *Het goede geſchiedt op verſchillende wijze.* De natuur deelde onder de redelijke bewoners der aarde eene oneindige verſcheidenheid van gedaanten uit, maar elkeen ontving toch *eene menſchelijke gedaante.* Zoo gaf zij ook aan dezelven een kenvermogen, hoogst verſcheiden in wijzing en kracht, maar elk ontving *een menſchelijk kenvermogen.* Hierdoor zijn verſchillende wegen

gen geopend, om de waarheid te onderzoeken en te vinden. In deze beteekenis, is de ſtelling: „ *Er is ſlechts één weg, om tot de waarheid te komen*," onwaar. De eene is ook meer geſchikt om waarheden te vinden en toe te paſſen, — de andere, meer, om gevondene waarheden in een' wetenſchappelijken vorm te brengen, en aan dezelven een grooteren graad van naauwkeurigheid te geven en met andere waarheden te vereenigen. Maar, van de andere zijde, moeten wij ook opmerken, dat de geest des menſchen vormbaar en buigzaam is, indien hij gezondheid en krachten bezit. Hij kan zich aan die oude geſtrenge methode gewennen, en daarin eindelijk behagen ſcheppen, — *en dit doet zeker geen nadeel.*

De Wiskunde en de veelvuldige toepaſſing derzelve op het meten van aardſche voorwerpen, en op de leer van het evenwigt en de beweging der ligchamen, zijn, ſedert EUCLIDES, vooral in de laatſte eeuwen, met raſſe ſchreden voortgegaan. Men heeft ook de élémentaire Meetkunde aanmerkelijk verrijkt, in het bijzonder door de toepaſſing der Algebra op dezelve. Men heeft meerder voorwerpen uit een meer algemeen oogpunt beſchouwd; gemakkelijkere en kortere wegen ontdekt, op welke men, met niet minder juistheid en duidelijkheid, de voorwerpen beſchouwen kan. Men heeft ook getracht, ſommige bepalingen, ſtellingen en redeneringen, bij EUCLIDES voorkomende, te verbeteren, vooral bij de theorie

der evenwijdige lijnen. Het ſchijnt mij toe, dat die verbetering veelal niet gelukkig geweest zij. Eenige voorbeelden van nieuwe bepalingen mogen dit ophelderen.

Volgens EUCLIDES, is *een vlakke hoek de helling van twee lijnen tot elkander, welke in een vlak bij elkander komen en niet in eene regte lijn liggen.* Het is zeer twijfelachtig, of de verandering, welke LA CROIX in deze bepaling gemaakt heeft, als eene verbetering te beſchouwen zij. „ *L'espace infini*" zegt hij (*c*) „ *compris entre deux droites, qui se coupent en un point, et que l'on peut concevoir prolongées autant qu'on le voudra, se nomme angle.*" Deze bepaling is, naar mijn gevoelen, geheel onvoldoende, omdat, in plaats van het zuiver denkbeeld van *rigting*, dat bij eenen hoek toch alleen in aanmerking moet komen: een geheel daarmede ongelijkſoortig denkbeeld geſteld wordt, namelijk dat van eene *onbepaalde uitgebreidheid van twee afmetingen*, waardoor noodzakelijk eene geheele verwarring in de grondbegrippen ontſtaat. Te regt zegt VAN SWINDEN (*d*): „ Men moet met het denkbeeld van eenen hoek, die alleen in de helling van twee lijnen beſtaat, dat van eene ruimte, die tusſchen drie lijnen beſloten ligt, niet verwarren." Wij kunnen hierbij voegen: „ men moet met het denkbeeld van eenen hoek nog minder verwarren het denkbeeld van eene onbepaalde ruimte,

(*c*) *Géometrie*, pag. 5. (*d*) *Meetkunde*, pag. 4.

te, die men zegt *tusſchen twee regte lijnen* bevat te zijn."

Hetzelfde heeft plaats bij de bepaling der hoeken, welke twee vlakken met elkander maken. Volgens EUCLIDES, is *het de hoek, welke gevormd wordt door twee regte lijnen, waarvan de eene in het eene, de andere in het andere vlak ligt, welke elkander in een punt der doorſnede ontmoeten, en op die doorſnede loodregt ſtaan.* Volgens LA CROIX, is dezelve eene *ligchamelijke ruimte*, eene uitgebreidheid van drie afmetingen. Hij zegt namelijk, dat deze hoek is: *l'espace compris entre deux plans, qui se coupent, considéré entre ces limites. Cet espace est à l'égard des plans, ce que l'angle est à l'égard des droites.*

EUCLIDES zegt, *dat eene regte lijn diegene is, welke gelijkelijk tusſchen derzelver uiteinde ligt.* Anderen zeggen: *zij is de kortſte weg van het eene punt tot het andere;* anderen: *waarvan alle punten naar eene ſtreek heen liggen;* anderen: *waarvan elk deel gelijkvormig is aan het geheel. enz.* Welke van deze of van andere bepalingen is de meest voldoende, of de minst onvoldoende?

EUCLIDES volgt in zijn zamenſtel geheel en al de *Sijnthetiſche* handelwijze, welke van het eenvoudige tot het zamengeſtelde overgaat. In de bepalingen echter, gebruikt hij ook wel de *Analijtiſche*, zoodat men, van een punt, van eene lijn, van een vlak,

twee verſchillende bepalingen bij hem vindt. Synthetiſche bepalingen zijn: *een punt is, hetwelk geene deelen heeft; eene lijn is eene lengte zonder breedte; een vlak is, hetgeen alleen lengte en breedte heeft.* Analijtiſche bepalingen daarentegen zijn: *Vlakken zijn de uiteinden der ligchamen; lijnen zijn de uiteinden van vlakken; punten zijn de uiteinden der lijnen.* Bij deze laatſte wordt het eenvoudige door het zamengeſtelde verklaard. De kenteekenen, welke de bepaling geven, zijn ook niet *inwendige*, maar *uitwendige of betrekkelijke kenteekenen.*

Langsdorf ſtelt in de Meetkunde, behalve deze Euclidiſche *punten*, *lijnen* en *vlakken*, nog *ruimtepunten*, *ruimtelijnen* en *ruimtevlakken*, en meent, dat er door het niet aannemen van deze laatſten verkeerde begrippen in de Wiskunde ontſtaan zijn. Hij verwerpt geheel de leer der oneindige deelbaarheid, der irrationale grootheden, en het begrip van het oneindige, enz. Hij oordeelt het dus noodig, volgens de door hem voorgedragene beginſelen, de Wiskunde aan eene reviſie te onderwerpen. (*e*)

Deze voorbeelden toonen genoegzaam, dat de Meetkundigen van den eerſten rang niet allezins overeenkomen in de bepaling van de voorwerpen der Meetkunde. Dewijl intuſſchen de juistheid der bepalingen en

(*e*) *Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik, auf Revision der bisherigen Principien gegründet von* K. CH. Langsdorf. 1802.

en de goede orde en verdeeling der voorwerpen, een zeer wezenlijk vereischte eener wetenſchap uitmaken, zal eene beſchouwing van den aard der meetkundige bepalingen, van de beginſelen, volgens welke de aard en juistheid derzelven moet beöordeeld worden, en eene ſchets van bepalingen, waarbij ik getracht heb, aan de opgegevene regels te voldoen, welligt niet ongepast zijn voor eene verhandeling in de Eerſte Klaſe van het Koninklijk-Nederlandſche Inſtituut, hetwelk zich de bevordering der wetenſchappen ten taak ſtelt.

BESCHOUWING VAN DEN AARD DER MEETKUNDIGE BEPALINGEN.

I. *Er beſtaan overeenkomſten tusſchen het bewijs eener ſtelling, en de bepaling van een begrip, zoodat hierdoor het eene door het andere kan opgehelderd worden.* Eene ſtelling bewijzen, is, *dezelve als een gevolg afleiden uit andere ſtellingen, welke waar zijn, en als waar erkend worden.* De bewezene ſtelling is het *beſluit* (concluſio); de ſtellingen, waaruit zij afgeleid wordt, zijn *de gronden*, of *de voorafgaande ſtellingen* (praemissae). Deze gronden of praemiſſen zijn of *bewijsbaar*, of *niet bewijsbaar*. In het laatſte geval zijn dezelve *grondwaarheden*, die op zichzelven, en dus onvoorwaardelijk waar zijn. Indien er zoodanige onmiddellijke, of grondwaarheden niet zijn,

zijn, dan is er hoegenaamd geene waarheid voor den mensch: want de *middellijke*, dat is, de door een bewijs te verkrijgen waarheid, ſteunt ten laatſte op eene, of meerdere onmiddellijke waarheden. Het ideaal van eenen Scepticist zou zoodanig een zijn, *die niets wil gelooven, dan hetgeen bewezen kan worden.* Hij verklaart hierdoor, niet alleen, dat hij niets gelooft, maar ook, dat hij voor geene overtuiging vatbaar is, doch zoodanig een wezen wordt even zoo min onder de menſchen gevonden, als de Stoïcijnſche wijze. Eene bewezene waarheid ontvangen wij uit de tweede en derde hand, eene onmiddellijke of grondwaarheid, uit de eerſte hand. Deze laatſte kan nooit minder zekerheid hebben, dan de bewezene.

Zoodanige ſtellingen, welke als grondwaarheden in eene wetenſchap voorkomen, noemt men, bijzonder in de Wiskunde, axiomata en postulaten, welke dus twee kenteekenen hebben: *zij zijn waar, en zij kunnen niet bewezen worden.* Onze onmiddellijke bewustheid getuigt van derzelver waarheid, welk getuigenis voorzeker levendiger en ſterker kan worden, wanneer wij overwegen hetgeen volgen zoude, indien dezelve voor onwaar of onzeker moesten gehouden worden. Intuſſchen gebruikt men ook de woorden: *axiomata* en *postulaten* in eene meer ruime beteekenis, volgens welke dezelve ook zoodanige ware ſtellingen zijn, waarvan het bewijs in eene hoogere wetenſchap kan gegeven worden. Deze hoogere wetenſchap

ſchap is de Wijsbegeerte, voor zoo verre dezelve de beginſelen en de laatſte gronden der dingen onderzoekt. Er zijn veel meer axiomata in de Wiskunde, dan in de leerboeken opgenoemd worden. Alle algemeene voorſchriften der Logica, alle regels volgens welke wij beſluiten, zijn in de Wiskunde onder de axiomata te rangſchikken. Indien een axioma in de Wijsbegeerte niet bewezen, dat is, uit hoogere beginſelen niet afgeleid kan worden, dan is hetzelve, in de naauwſte beteekenis des woords, een axioma of grondwaarheid.

Indien men dus vraagt: welke waarheden moeten in de Wiskunde als grondwaarheden beſchouwd worden? dan is het antwoord: *zoodanige, welke of geheel niet, of althans niet uit wiskundige grondbeginſelen kunnen bewezen worden.* Alle andere waarheden moeten hier bewezen worden, indien men volkomen aan de vereischten eener wetenſchap wil voldoen.

Welke zijn dan deze grondwaarheden, en waar vandaan de overtuiging van derzelver waarheid? Het antwoord is: zij behooren tot het wezen en de natuur van ons kenvermogen; het zijn de wetten, volgens welke wij ons de dingen, en derzelver verband voorſtellen; volgens welke de verbeelding vormen ſchept, zamenſtelt of ontleedt, en de begrippen verzinnelijkt, en volgens welke het verſtand, over waarheid, gelijkheid en ongelijkheid, beginſel en gevolg

volg enz. oordeelt. Gelijk de zintuigen ons, bij elk gebruik van dezelven, het beſtaan der uitwendige wereld vertoonen, zoo vertoont ons ook het kenvermogen, bij elk gebruik, dat wij daarvan maken, de eene of andere grondwaarheid. (*f*)

Hetgeen gezegd is van de bewijzen, kunnen wij ook toepaſſen op de *bepalingen* in de Wiskunde. Het doel eener bepaling is, aan te wijzen de kenteekenen eener zaak, waardoor zij van elke andere onderſcheiden wordt. De ſom dezer kenteekenen maakt het begrip der zaak uit. Deze kenteekenen zelve zijn begrippen, welke begrippen of eenvoudig, of zamengeſteld zijn, dat is, uit een of uit meerdere kenteekenen beſtaan. Van de eenvoudige begrippen kan geene bepaling gegeven worden. De zamengeſtelde begrippen worden, door de bepaling, in derzelver kenteekenen ontleed. Hieruit volgt, dat elke bepaling eenvoudige begrippen vooronderſtelt, welke dus niet verder bepaald kunnen worden.

Hetgeen gezegd is, geldt van alle ſoort van verklaring, dat is, van ſtellingen, waardoor de kenteekenen eener zaak, of de deelen eener voorſtelling, aangewezen worden. Bij voortgezette verklaringen, komt men noodzakelijk op kenteekenen en voorſtellingen, welke eenvoudig zijn, en dus niet verder verklaard kunnen worden. Deze moeten dus op zich zel-

(*f*) *Prolegomena*, blads. 130 en volg. blads. 527 en volg.

zelve klaar zijn, dat is, zich zoodanig aan onzen geest vertoonen, dat wij dezelven, van elk ander kenteeken of voorſtelling, kunnen onderſcheiden.

Gelijk er dus grondwaarheden voor den mensch zijn, welke hij uit geene andere kan afleiden, en waarvan de zelfsbewustheid alleen getuigenis kan geven, zoo zijn er ook *grondvoorſtellingen* (aanſchouwingen of begrippen) welke voor geene bepaling of verklaring vatbaar zijn, en welke, door de zelfsbewustheid alleen, klaarheid hebben. Wij kunnen dezelven met andere voorſtellingen vergelijken, waaruit *betrekkelijke*, *uitwendige* kenteekenen voortkomen, even zoo als wij de toepaſſing van eene grondwaarheid, of derzelver betrekking tot andere waarheden, kunnen aanwijzen. Maar derzelver *inwendige*, zamenſtellende kenteekenen of deelen, kunnen wij niet bepalen. Het is waar, er kunnen zamengeſtelde voorſtellingen zijn, welke wij, uit hoofde van gebrek aan doorzigt, voor eenvoudig houden, of uit hoofde van de beperktheid van het menſchelijk kenvermogen, voor eenvoudig en dus onverklaarbaar, moeten houden, maar hieruit volgt niet, dat er geene andere dan zamengeſtelde zijn. *Het zamengeſtelde vooronderſtelt toch het eenvoudige.* Al ware het, dat al de ſtellingen, welke wij voor grondwaarheden houden, uit andere waarheden volgden, is het niet te min ontwijfelbaar, dat er grondwaarheden zijn.

Het onderzoek der kenteekenen eener voorſtelling, ge-

geleidt ons tot reekſen van geſlachten en ſoorten, waarvan elke voorgaande term het geſlacht is van den volgenden term, en dus elk een door twee kenteekenen bepaald wordt, door het *geſlachtsbegrip* en *ſoortelijk verſchil* (differentia ſpeciei). Wanneer wij in deze reekſen tot den eerſten term, dat is tot het hoogſte geſlacht, opklimmen, dan vinden wij aldaar een door abſtractie voortgebragt *eenvoudig* begrip (τὸ ὄν, ens, aliquid, iets), hetwelk niet alleen het gemeenſchappelijk kenteeken is van al hetgeen er beſtaat, maar ook van hetgeen niet beſtaat; mits het gedacht of voorgeſteld kan worden. Dit begrip kan niet verder ontleed worden, want het is tegengeſteld aan het *non ens*, hetgeen door geen verſtand (een menſchelijk of niet menſchelijk verſtand) kan gedacht worden. Al de overige geſlachtsbegrippen der termen van deze reeks zijn zamengeſteld, maar hunne ſoortelijke verſchillen kunnen *eenvoudig* zijn.

Hieruit volgt, dat niet alle meetkundige voorſtellingen voor verklaring of bepaling vatbaar zijn, en dat het eene vergeefſche poging zij, om de eenvoudige te willen verklaren of bepalen; en dat men, zulks doende, óf eene verkeerde bepaling, óf ſlechts eene woordverklaring geeft, óf in die fout vervalt, welke men *eenen cirkel in de definitie* noemt. Ook moet de nadere verklaring en ontwikkeling van ſommige voorſtellingen aan de Wijsbegeerte worden overgelaten; doch zal men zulks, zoo min mogelijk, doen,

doen, opdat de Wiskunde hare wetenſchappelijke waarde handhave. (*g*)

Diegenen intuſſchen, welke meenen, dat het overtollig zij, eene bepaling en verklaring te geven van die voorſtellingen, welke door zich zelve reeds klaar zijn, zoo als van eene regte en kromme lijn, ligchaam, ruimte, oppervlakte, plat vlak, figuur, driehoek, enz., omdat er niemand is, welke daarvan geene voorſtelling heeft, — deze toonen geen begrip te hebben van wetenſchap, en verlagen de Wiskunde tot eene eenvoudige kunst; — even zoo als diegenen, welke meenen, dat het bewijs eener ſtelling, wier waarheid elkeen toeſtemt, (zoo als, dat de twee zijden van eenen driehoek te zamen genomen grooter zijn dan de derde zijde) overbodig zij. Indien geene juiste bepalingen gegeven worden van de voorwerpen, welke daarvoor vatbaar zijn, kan ook geen behoorlijk bewijs van hetgeen tot dezelve behoort gegeven worden: want de bepalingen zelve zijn mede de grondſlagen van een bewijs. Door de bepaling, of in 't algemeen, door het opzoeken der bijzondere deelen of kenteekenen eener voorſtelling, verkrijgt eerst de voorſtelling zelve, en de kennis der zaak duidelijkheid en naauwkeurigheid.

II. Elk leerſtelſel eener wetenſchap, hetwelk de be-

(*g*) *Prolegomena*, bladz. 414 en volg.

beſluiten en derzelver gronden mededeelt, in eenen vorm, overeenkomſtig met de vereischten eener wetenſchap, *gaat in het algemeen uit van de beginſelen of gronden tot derzelver gevolg.* Deze methode, welke in het bijzonder bij de Wiskunde gevolgd wordt, is de *ſynthetiſche* (van Proſyllogismen tot Epiſyllogismen), waarvan men ook kan zeggen, *dat zij van het eenvoudige tot het meer zamengeſtelde overgaat*, voor zoo verre namelijk het gevolg uit meerdere gronden wordt afgeleid, dan het beginſel. Hieruit volgt intusſchen niet, dat *zij altijd van het algemeene tot het bijzondere overgaat.* Dit heeft alsdan plaats, *wanneer het algemeene wordt voorgeſteld, als de grond van het bijzondere*, zoo als b. v. wanneer de ſtelling, dat de ſom der drie hoeken van eenen driehoek twee regte hoeken is, op regthoekige, gelijkbeenige en gelijkzijdige driehoeken wordt toegepast. Maar de ſijnthetiſche methode gaat van het bijzondere tot het algemeene, *wanneer uit het bijzondere het algemeene wordt afgeleid*, zoo als de algemeene ſtelling; de ſom der hoeken van eenen regtlijnigen veelhoek is 2 n — 4 regte hoeken (waar n het getal der zijden is) uit het bijzondere geval, waarin n = 3, of de figuur een driehoek is, afgeleid word. Hiertoe behoort ook de beſluittrekking uit de *Analogie* en *Inductie* tot het algemeene.

Deze ſijnthetiſche methode vertoont zich in elk goed

goed leerſtelſel der Wiskunde in al derzelver deelen, gelijk ook PLATO (*a*) te regt aanmerkt, en het is mijns oordeels een verkeerd denkbeeld, wanneer men meent, dat dezelve alleen plaats heeft in de Euclidiſche Meetkunde, en daarentegen in de Arithmetica (in den ruimſten zin genomen) de *analijtiſche methode*, welke van het gevolg tot het beginſel, van de ſtellingen tot de gronden der ſtelling, van de werking tot de oorzaak, en dus in tegengeſtelde rigting gaat, zou heerſchen, zoodat men ook van eene *Analyſis finitorum et infinitorum* ſpreekt. In de gewone Rekenkunde, in de Algebra, Analyſis, Differentiaal en Integraalrekening, enz., *wetenſchappelijk voorgedragen*, vindt men even zoowel den ſijnthetiſchen gang als in de Euclidiſche Meetkunde. Een paar voorbeelden mogen dit opheldéren.

De methode, volgens welke men uit de vergelijking $x^2 + ax + b = o$ vindt $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ is even zoowel ſijnthetisch als die, volgens welke EUCLIDES uit de eigenſchappen der evenwijdige lijnen vindt, dat de ſom der hoeken van eenen regtlijnigen driehoek gelijk is aan twee regte hoeken. In beiden is de Syllogistiſche gang, α is, dus β is, dus γ is, enz., waar α, β, γ ook zamengeſtelde ſtellingen kunnen aanwijzen. (*b*)

Men

(a) *De Republica* L. VI, p. 510, seqq. Ed. *Steph.*

(b) *Proleg.* bl. 339—341.

Men ziet hieruit, dat het onnaauwkeurig is, te zeggen, dat de *analijtiſche methode geſchikt zij voor het vinden, de ſijnthetiſche voor het bewijzen.* Beide methoden zijn voor het vinden en bewijzen geſchikt, doch in ſommige gevallen is tot het vinden de eene meer geſchikt dan de andere. De natuur toont ons veranderingen; wij zoeken en vinden eene algemeene oorzaak op den analijtiſchen weg, maar wanneer deze oorzaak gevonden is, verklaren wij hierdoor eene menigte van andere veranderingen, en vinden dus de oorzaak van deze op den ſijnthetiſchen weg. Hoe meer ons de algemeene natuurwetten en oorzaken bekend zijn, des te meer wordt het leerſtelſel der Natuurkunde eene wetenſchap, en verkrijgt den ſijnthetiſchen vorm.

Bij de toepaſſing der Wiskunde op de Natuurkunde, worden eene of meerdere daadzaken, door de ervaring aangewezen, ten grondſlag gelegd, en worden uit deze en uit wiskundige ſtellingen, als beginſelen beſchouwd, gevolgen afgeleid, welke de verſchijnſelen verklaren, nader bepalen, en de toepaſing daarvan doen zien. Dit is dus ook de ſijnthetiſche weg.

Uit de bepaling van eene cirkellijn, en uit andere bewezen grondbeginſelen wordt afgeleid, dat de vergelijking van derzelver coördinaten is, $y^2 = 2rx - x^2$, en dit geſchiedt volgens de ſijnthetiſche methode. Hier is de bepaling van de cirkellijn het beginſel en

de

de vergelijking is het gevolg. Maar men kan ook omgekeerd die vergelijking zelve tot een beginſel nemen, en daaruit afleiden, dat de kromme lijn, wier regthoekige coördinaten in die betrekking ſtaan als door de vergelijking wordt aangewezen, eene cirkellijn zij, dat is, eene kromme lijn van die hoedanigheid, welke in die bepaling werd uitgedrukt. De methode is geheel dezelfde, dat is ſijnthetisch. Het verſchil beſtaat alleen hierin, dat hetgene op den eerſten weg een beginſel (eene bepaling) was, op den tweeden weg een gevolg is, en hetgene daar een gevolg was, hier een beginſel (eene bepaling) is. Het verſchil is niet grooter, dan het volgende zou wezen.

Men bepaalt aldus het Parallelogram, *dat hetzelve eene vierzijdige regtlijnige figuur is, waarvan de tegenoverſtaande zijden evenwijdig zijn*, en leidt hieruit af andere eigenſchappen van het Parallelogram, zoo als, dat de diagonalen elkander midden doordeelen. Wanneer echter iemand een Parallelogram aldus *bepaalde, dat hetzelve eene regtlijnige vierzijdige figuur is, waarvan de diagonalen elkander midden door deelen*, zou hij op eene even gemakkelijke wijze uit deze bepaling de overige eigenſchappen van het Parallelogram afleiden en dus ook deze, *dat de tegenoverſtaande zijden evenwijdig zijn.* Maar de eene weg is niet meer ſijnthetisch dan de andere (*k*)

Men

(*k*) *Proleg.* bl. 497—524. bl. 292—298.

Men moet evenwel analijtiſche en ſijnthetiſche methode niet verwarren met *analijtisch* en *ſijnthetisch oordeel.* Het onderſcheid van deze twee ſoorten van oordeel heeft KANT getracht aan te wijzen, en dit onderſcheid zelf is mede een beginſel van deszelfs Critiek der zuivere rede.

Hieruit volgt van zelve, waarin de ſijnthetiſche orde van een wetenſchappelijk leerſtelſel beſtaat. Het begint met de bepaling der voorwerpen, met de axiomata en postulaten, of grondwaarheden, en door de gevolgtrekkingen hieruit wordt het gebouw vervaardigd, of althans, als zoodanig vervaardigd, voorgeſteld.

Wij hebben hier de ſijnthetiſche methode voorgeſteld, als vereischte van een wetenſchappelijk leerſtelſel, *wat het geheel aangaat.* Hieruit volgt evenwel niet, dat men niet ook bij ſommige deelen van hetzelve den analijtiſchen weg kan volgen, wanneer gewigtige oogmerken daarmede bereikt worden. Het vinden der waarheid, en de duidelijke aanwijzing van derzelver gronden is het doel, en die weg is de beste, waardoor dit doel het best bereikt wordt.

Hetgene wij van het bewijs en de orde der voorwerpen gezegd hebben, kan ook in zeker opzigt op de bepalingen en derzelver orde toegepast worden. Doch dit vereischt eene nadere beſchouwing, waartoe het volgende dient.

III. Men heeft *twee ſoorten* van bepalingen. De eene

eene ſoort (*definitio accidentalis*) voldoet alleen aan het algemeen vereischte, dat zij die kenteekenen aanwijst, waardoor het voorwerp van alle andere voorwerpen het gemakkelijkst en naauwkeurigst onderſcheiden wordt, zonder daarop te zien, hoedanig deze kenteekenen zijn, of dezelve noodzakelijk of toevallig, eigen of betrekkelijk, oorſpronkelijk of afgeleid zijn. Zoodanig zijn de bepalingen voorkomende in de natuurlijke geſchiedenis. Hier zijn al de kenteekens, althans wat aangaat de dieren en planten, *zigtbare*, dewijl zoodanige de onderſcheiding gemakkelijk maken. De orde, welke hier het verſtand eischt, is, dat het geſlacht de ſoort vooraf ga, dat is, dat de volgorde der te bepalen begrippen zoodanig zij, dat het volgende al de kenteekens hebbe van het voorgaande, en daarenboven zijne eigene. Elke bepaling toont dus aan het *geſlachtsbegrip*, en het *ſoortelijk verſchil*. Het volgende begrip heeft dus eenen grooteren inhoud, maar eenen kleineren omvang dan het voorgaande. Op die wijze begint men met klaſſen, en gaat voort tot de geſlagten, ſoorten en onderſoorten. De orde der bepalingen is dus ook hier de ſijnthetiſche.

IV. De tweede ſoort van bepalingen (*definitio essentialis*) wijst aan, en wel *volledig*, *de oorspronkelijke en noodzakelijke kenteekens eener zaak*, dat is diegene, waarin het wezen der zaak beſtaat, en waaruit de overige eigenſchappen kunnen afgeleid

worden. Dezen graad van volmaaktheid kunnen nooit de bepalingen der voorwerpen der natuur, die wij door de ervaring leeren kennen, bereiken, omdat wij al de oorſpronkelijke noodzakelijke kenteekens dezer voorwerpen niet kunnen aanwijzen, zoodat onze bepalingen nooit geſchikt zijn, om daaruit de overige kenteekenen afteleiden. Wij hebben dus nog overal de teregtwijzing der ervaring noodig, welke ons ſteeds bij voortgezet onderzoek een nieuw kenteeken toont, hetwelk niet in onze bepaling bevat is; weshalve ook het *conſtrueren der natuur a priori* een der meest belagchelijke herſenſchimmen is.

Anders is het gelegen met de bepalingen in de zuivere Wiskunde voorkomende, welke die volmaaktheid in eenen hoogen graad kunnen hebben, omdat de kennis der voorwerpen niet op uitwendige waarneming en ervaring berust. De voorwerpen zijn hier voortgebragt, óf door de vrije gemeenſchappelijke werking van het verſtand en de verbeelding, óf zijn geheel in de natuur dezer vermogens gegrond, zoodat wij alleen de wijze van vorming behoeven te overwegen, om tot de ware bepaling te komen. Men heeft ook hierbij het gewigtig voordeel, dat de verbeelding voor een begrip een beeld ſchept, waardoor hetzelve verzinnelijkt, en deszelfs mogelijkheid aanſchouwlijk voorgeſteld wordt, Zoo geeft ons de verbeelding een beeld van rigting en afſtand door de regte lijn, alsmede een beeld van eenen driehoek, parallellogram, cirkel, kegelſnede enz.; terwijl het verſtand uit dat beeld, als 't ware, verzamelt hetgeen

met

met het begrip overeenſtemt. De zoogenoemde *poſtulaten* toonen niet anders aan, dan dit vermogen der verbeeldingskracht, en bedoelen geenszins het afteekenen van het voorwerp (zoo als, om door een werktuig, eenen driehoek, cirkel enz. te beſchrijven) want dan zouden zij iets eiſchen, hetgeen onmogelijk is. Ik kan nooit eene lijn zoodanig teekenen als overeenkomt met de bepaling derzelve, en nog minder, zoo veel ik wil, dezelve verlengen. Ook zelfs het zinnelijke beeld van eene regte lijn, dat mij de verbeelding voorhoudt, heeft meer bijzonderheden, welke zij daarvan niet affcheiden kan, en hetgeen door het verſtand moet geſchieden. Zij vertoont een ligchaam, in plaats van eene lijn; niet de oppervlakte van den bol, maar den bol met de oppervlakte; niet den zuiveren meetkundigen kegel, maar een natuurlijk ligchaam, dat den vorm van eenen kegel heeft. Daarenboven kan het zinnelijk beeld van eene figuur, van een ligchaam enz. als individueel beeld niet het begrip zelf aanwijzen; zoodat het verſtand in het bijzondere het algemeene moet zien, om juiste beſluiten te maken. Om te bewijzen, dat de ſom der drie hoeken van eenen driehoek twee regte hoeken is, moet de verbeelding eenen driehoek vormen, doch deze driehoek is een individueel voorwerp, waarin alles bepaald is, hoeken en zijden, en hij zal evenwel, overeenkomſtig het doel, alle ſoorten van driehoeken voorſtellen. Dus moet het verſtand daarin,

als 't ware, ſlechts het algemeene zien, en datgene, waarin zich deze driehoek van elken anderen driehoek onderſcheidt, niet in aanmerking nemen.

V. De wiskundige bepalingen zijn of *theoretiſche* of *genetiſche*. De *theoretiſche* komen in zoo verre overeen met die der natuurgeſchiedenis, dat daarin twee begrippen voorkomen, het eene van het *naaste geſlacht*, het tweede van het *verſchil der ſoort*. Hier wordt vereischt, dat geen tusſchenliggend geſlacht overgeſlagen wordt. Tot een voorbeeld van deze ſijnthetiſche orde der te bepalen voorwerpen diene de volgende reeks. *Iets*, *iets dat zamengeſteld is*, *grootheid*, *uitgebreide grootheid*, *meetkundige grootheid*, *vlak*, *plat vlak*, *platte figuur*, *regtlijnige platte figuur*, *vierzijdige regtlijnige platte figuur*, *parallelogram*, *regthoekig parallelogram*, *vierkant*, *vierkante el.*

VI. De *wiskundige genetiſche bepalingen* toonen aan, hoe het voorwerp ontſtaat, of ontſtaan kan. Deze zijn vooral aanbeveling waardig, dewijl dezelve tevens de mogelijkheid van het voorwerp aanwijzen, en uit dezelve de theoretiſche bepalingen gemakkelijk afgeleid worden. Zij toonen als het ware aan, op welke wijze de verbeelding het voorwerp afteekent, en hebben dus niet minder wetenſchappelijke waarde dan de theoretiſche, ja zij munten ſoms boven dezelve uit. Indien men b. v. eene cirkellijn aldus bepaalt:

Wan-

Wanneer eene lijn rondom een van hare uiteinden draaijende, altijd in hetzelfde vlak blijft, dan beſchrijft elk punt van deze lijn, met uitzondering van dat uiteinde, eene cirkellijn, dan is dit eene genetiſche bepaling, waaruit terſtond de volgende geſlachts- en ſoort bepaling volgt. *Eene cirkellijn is eene lijn in* EEN *vlak gelegen, en in zichzelve terugkeerende, waarvan elk punt even verre afſtaat van een ander punt in dat vlak.*

Ook bij deze bepalingen blijkt de ſijnthetiſche orde; het voortgebragte brengt wederom andere voorwerpen voort. Uit de ronddraaijing eener lijn ontstaat een cirkel, uit de ronddraaijing van eenen cirkel eene globe, en uit de evenwijdige beweging van den cirkel een cijlindervlak.

Uit het beſchouwde volgen de regels voor de bepalingen, waarvan wij hier eenige der gewigtigſte beſchouwen zullen.

VII. Het is een wezenlijk vereischte eener bepaling, dat zij diene, om daaruit ware ſtellingen af te leiden, dat is, dat zij in den eenen of andere Syllogismus als praemiſſe voorkome. Indien zij hiertoe niet geſchikt is of niet gebruikt wordt, dan is zij als *overtollig* in het zamenſtel te beſchouwen, of is ſlechts eene *woordverklaring*, dienende om de dubbelzinnigheid weg te nemen, enz. Zoodanig eene overtollige bepaling is die van eene regte lijn, bij EUCLIDES voorkomende, vol-

volgens welke *dezelve gelijkelijk tusſchen hare ſtippen of uiteinden ligt*; want nergens wordt van dezelve gebruik gemaakt noch kan daarvan gebruik gemaakt worden. Eene vruchtbare bepaling daarentegen is die *van twee evenwijdige lijnen, van de helling van twee vlakken, van eenen cirkel*, — zoo als dezelve door EUCLIDES zijn gegeven, omdat zij tot het vinden van andere hoedanigheden dezer voorwerpen dienen. Hoe meer gewigtige gevolgtrekkingen onmiddelijk uit eene bepaling kunnen afgeleid worden, des te meer waarde heeft dezelve in dit opzigt. Voor zoo verre verdient de bepaling van evenwijdige lijnen, welke VAN SWINDEN geeft, de voorkeur boven andere, omdat daaruit onmiddelijk de overige eigenſchappen van dezelve volgen.

VIII. *Elke bepaling moet het begrip ophelderen en deszelfs inhoud duidelijk aanwijzen.* Aan dit vereischte voldoen niet diegenen, welke EUCLIDES geeft van een ligchaam, een vlak, eene lijn, enz. Een *ligchaam is, hetgeen lengte, breedte en dikte heeft. Een vlak is, hetgeen alleen lengte en breedte heeft. Eene lijn is eene lengte, die niet breed is.* Anderen noemen dit, *drie, twee en één afmeting hebben.* Men vraagt hier, wat is toch afmeting? wat is lengte, breedte en dikte? waardoor onderſcheidt zich het eene van het andere? — Wanneer men zich deze voorſtellingen verduidelijkt, ziet men, dat alles bepaald word door regte lijnen en rigtingen. Het onder-

derſcheid tusſchen lengte, breedte en dikte of hoogte, kan geheel niet aangewezen worden. Bij een regthoekig parallelogram kan men willekeurig elke zijde beſchouwen als lengte of breedte, en bij een regthoekig parallelopipidum elke doorſnede der vlakken, als lengte, breedte of hoogte. Welke is toch de lengte en breedte van een cirkelvlak? — welke, de lengte, breedte en dikte, van eene globe? Deze uitdrukkingen kunnen eerst in het vervolg opheldering ontvangen, wanneer er over de inhoudvinding der figuren en ligchamen, over de coördinaten, enz., gehandeld wordt. Zoodanige bepalingen moeten dus met onduidelijkheid tevens onvruchtbaarheid paren. Men ziet ook niet, dat daarvan, ten bewijze van de eene of andere ſtelling, gebruik gemaakt wordt. De wijsgeer C. WOLFF geeft deze bepaling van eene regte lijn, *dat zij diegene zij, waarvan de deelen gelijkvormig zijn*. Deze heeft eene nadere verklaring noodig. Men vraagt namelijk: waarin beſtaat de gelijkvormigheid der deelen? en waarom kan ik niet ook twee bogen van denzelfden cirkel gelijkvormig noemen? Zoodanig is ook de gemelde overtollige bepaling, welke EUCLIDES van eene regte lijn geeft; welke onmogelijk verſtaan wordt, wanneer men niet reeds de voorſtelling heeft van eene regte lijn. Daarenboven is in dezelve een cirkel. De uitdrukking: *eene regte lijn is diegene, welke gelijkelijk tusſchen derzelver uiteinden ligt*, zegt toch niet anders, dan, *een regte lijn is die lijn*,

lijn, welke niet buiten de regte lijn is, die door de beide uiteinden getrokken is.

IX. Bij eene wiskundige bepaling verlangt men te regt, dat zij zoodanige kenteekenen aanwijze, welke de natuur van het voorwerp ten naauwkeurigſte te kennen geven; en *niet zoodanige, welke uit deze wezenlijke kenteekenen kunnen afgeleid worden.* Even zoo min als de bepaling voldoende is: *Lucht is die vloeiſtof, welke het water in de pomp naar boven perst:* even zoo min is zulks deze: *Evenwijdige lijnen zijn diegenen, welke overal denzelfden afſtand van elkander hebben?* Al had deze geene andere gebreken, zij toont niet de natuur der evenwijdige lijnen aan, *welke in gelijkheid van rigting beſtaat.* Hetzelfde kan gezegd worden van de bepaling van eene regte lijn, welke door LA CROIX en LEGENDRE gegeven wordt, en reeds door ARCHIMEDES gebruikt is: *La ligne droite est le plus court chemin pour aller d' un point á l' autre.* Bij LE GENDRE, welke, in overeenſtemming met EUCLIDES, zegt: *La ligne est une longueur sans largeur,* vertoont zich het gebrekkige nog meer. De regte lijn wordt voorgeſteld als eene ſoort van lijn, dus eischt toch de bepaling der ſoort, dat daarin het kenteeken van het geſlacht voorkome. Zij had dus moeten zijn: La ligne droite est *une longueur sans largeur, qui est le plus court chemin d'un point á un autre.*

Zoo-

Zoodanig eene bepaling zal voorzeker niet verſtaan worden, wanneer men niet te voren het denkbeeld heeft van eene regte lijn. Zij toont ook geheel niet aan de natuur van eene regte lijn, wijst ſlechts aan een kenteeken betrekkelijk tot den afſtand, maar volſtrekt geen kenteeken, dat betrekking heeft tot de rigting. Eene regte lijn toont beide aan, afſtand en rigting, en is daarom de grondſlag van de geheele Meetkunde Mechanica en Optica, waarvan voorzeker in deze bepaling geen ſpoor zigtbaar is.

X. *Eene meetkundige grootheid, welke eene grootheid op zichzelve is, en als zoodanig beſchouwd wordt, moet door eigene, en niet door betrekkelijke kenteekens, welke het wezen der zaak niet toonen, bepaald worden.*

Met dezen regel zijn ſtrijdig de bepalingen van EUCLIDES. *Vlakken zijn de uiteinden der ligchamen, lijnen zijn de uiteinden der vlakken, punten zijn de uiteinden der lijnen.* Door deze bepalingen worden alleen de betrekkingen aangewezen tusſchen vlakken en ligchamen, lijnen en vlakken, punten en lijnen, terwijl daarenboven deze betrekking niet altijd plaats heeft. Lijnen worden ook op zichzelve beſchouwd zonder betrekking tot vlakken; vlakken en deelen van vlakken, zoo als driehoeken, veelhoeken, cirkels enz. zonder eenige betrekking tot ligchamen. Daarenboven wordt mij door deze bepaling niet bekend, wat een vlak zij,

zij, indien mij niet bekend is, wat een ligchaam zij, noch wat eene lijn zij, indien mij niet bekend is, wat een vlak zij, enz.

Het zelfde moeten wij ook aanmerken op die voorſtellingen en bepalingen van punten, lijnen, en vlakken, volgens welke dezelve *afgetrokkene voorwerpen* zijn, ontſtaande door b. v. bij een ligchaam de dikte, bij een vlak de breedte, en bij eene lijn de lengte niet in aanmerking te nemen. Behalve hetgeen wij reeds van lengte, breedte en dikte gezegd hebben, kunnen wij hier de vraag voorſtellen: moet het denkbeeld van *rigting*, waarvan alle vorm en gedaante afhangt, en hetwelk in de leer der beweging eene zoo gewigtige plaats bekleedt; het denkbeeld van *affland*, zijnde de grondſlag van alle meetkundige grootheid, indien wij de hoeken uitzonderen; het denkbeeld van *regte lijn*, waardoor die twee denkbeelden verzinnelijkt worden en waarop alle voorſtelling van afmeting, lengte, breedte en hoogte berust, *moeten*, zeg ik, *deze denkbeelden bloot als afgetrokkene voorſtellingen beſchouwd worden?*

XI. *Gelijk de ſtellingen der wiskunde, moeten ook de bepalingen der wiskundige voorwerpen met elkander in verband van grond en gevolg gebragt worden.* Het denkbeeld van rigting moet ons geleiden tot den hoek; het denkbeeld van hoek tot de rigting van een vlak, dit tot het verſchil der rigting van

een

een vlak en van eene lijn, en tot het verſchil der rigting van twee vlakken enz. Hiermede komt niet overeen de door EUCLIDES gegevene *bepaling der helling van twee vlakken.* Dezelve heeft iets willekeurigs, daar men niet de reden ziet, *waarom de helling van twee vlakken de hoek is, welken de in die vlakken op de doorſneden getrokken loodlijnen met elkander maken.* Helling is toch verſchil van rigting, en er is niet aangewezen, welke de rigting van een vlak zij, of hoe dezelve bepaald wordt.

Zoo hangt ook alle gelijkvormigheid van figuren en ligchamen af van gelijkheid van rigting, en dus van gelijkheid van hoeken, en evenwel brengt men, in de bepaling van gelijkvormigheid, evenredigheid der zijden, en zegt: *twee figuren zijn gelijkvormig, wanneer de eveneens geplaatſte hoeken gelijk zijn, en de zijden om die hoeken evenredig zijn.* Dit laatſte is een gevolg van de gelijkheid der hoeken door de zijden, en van de gelijkheid der hoeken door de diagonalen gevormd, en behoort dus niet in de bepaling zelve gebragt te worden.

Dit zijn eenige aanmerkingen, welke misſchien ter juiste beoordeeling van meetkundige bepalingen kunnen ſtrekken. Ik heb alleen getracht het eigenaardige van dezelven aan te wijzen, en ben dus voorbijgegaan de algemeen bekende voorſchriften, welke in de logiſche Leerboeken aangaande de bepalingen en verklaringen in het algemeen gegeven worden.

De hier volgende ſchets van meetkundige bepalingen kan aanwijzen, hoedanig, en in welke orde dezelve naar mijn oordeel zouden kunnen zijn, om aan de gemelde vereischten in het algemeen meer te voldoen, dan diegene, welke wij in de leerboeken der Meetkunde aantreffen. Ik heb getracht, zoodanige, *theoretiſche* of *genetiſche*, te gebruiken, welke mij toeſchenen het meest vruchtbaar te zijn in gevolgtrekkingen, weshalve ik, om dit aan te wijzen, eenige ſtellingen, welke onmiddellijk uit de bepaling volgden, of daaruit gemakkelijk konden afgeleid worden, er bijgevoegd heb. Het zal dus eene ſchets zijn van de werking der verbeeldingskracht, op den weg haar door het verſtand voorgeſchreven, om van het meest eenvoudige tot het zamengeſtelde voort te gaan. Het verſtand onderzoekt deze, door de verbeelding voortgebragte, vormen, en door deze vereenigde werking van beide vermogens ontſtaat het zamenſtel der Meetkunde. *Rigting en afſtand van twee punten, is de grondſlag van het geheele gebouw.* De orde is dus deze: Men begint met de beſchouwing van de betrekking van twee punten, gaat over tot die van drie punten, welke niet in dezelfde regte lijn zijn, en eindigt met die van vier en meer punten, welke niet in het zelfde vlak zijn. Op dezen weg bieden zich, als 't ware, van zelven aan alle meetkundige voorwerpen, welke onze beſchouwing verdienen.

AL-

ALGEEMEENE BESCHOUWING.

I.

BETREKKELIJKE RUIMTE.

Ruimte is, met betrekking tot de dingen, welke wij door onze zintuigen waarnemen, of door de verbeelding ons voorſtellen, eene zekere orde derzelven, waardoor derzelver *nevens elkander en buiten elkander zijn* bepaald wordt. Deze orde der uitwendige voorwerpen wordt ons bekend door zintuigelijke waarnemingen (in het bijzonder door het gezigt en het uitwendig gevoel of tastvermogen); en wel zoodanig, dat geene waarneming noch voorſtelling van die voorwerpen kan plaats hebben, zonder vergezeld te zijn van eene meer of min duidelijke bewustheid of voorſtelling van deze orde (a). Wij kunnen deze (tot die dingen) *betrekkelijke ruimte* de *empiriſche* noemen, om dat ons deze orde bekend wordt door de *ervaring*, dat is, door de zintuigelijke waarnemingen, en door de beſluiten, welke wij daaruit afleiden.

2.

(a) *Aanmerking.* Wij toonen aan de noodzakelijkheid van deze orde, door te zeggen, *hetgene beſtaat moet ergens zijn; hetgene nergens is, beſtaat niet. Si mortui sunt*, zegt CICERO (Tusc. Disp. I. 6), *nusquam esse non possunt.*

2.

VOLSTREKTE RUIMTE.

Was dit de eenige ruimte, waarvan wij eene voorſtelling hebben, dan zou men dezelve bloot voor eene betrekkelijke eigenſchap der dingen moeten houden, welke dus verdwijnt, wanneer de dingen zelven verdwijnen. Elke orde houdt op, wanneer de dingen, waaraan wij dezelve toekennen, ophouden te beſtaan. Maar verwijderen wij, in onze voorſtellingen, zoo veel wij kunnen, alle door de zinnen waarneembare dingen, (hoewel dit niet geheel mogelijk is, omdat wij toch zelven altijd *aanſchouwers* blijven) zoodat er een volkomen ijdel is, de voorſtelling van ruimte blijſt toch, en wel zoodanig, dat het ons niet mogelijk is, dezelve te vernietigen. Voor en achter ons, boven en beneden ons, ter regter- en ter linkerhand van ons, en in alle tusſchen dezelve gelegene rigtingen, zien wij, na alle dingen weggenomen te hebben, in onze verbeelding *niets*; maar dat voor en achter, beneden en boven, dat ter regter- en ter linkerhand, en de oneindig vele rigtingen, kunnen wij uit onze voorſtellingen niet wegnemen.

Er is dus, volgens onze voorſtelling, eene ruimte, welke, als voorwerp op zich zelve, onafhankelijk van de dingen, aan welke eene ruimte betrekking toekomt, kan beſchouwd worden. Dit zal dus

in

in de voorſtelling geene *betrekkelijke*, maar *volſtrekte* ruimte zijn, niet eene orde der dingen, maar *een voorwerp op zich zelf*. En zoo is het inderdaad. De verbeelding ſtelt de ruimte voor als een individueel voorwerp, uit deelen beſtaande, welke onder elkander en met de geheele ruimte gelijkſoortig zijn, en onder elkander ſlechts in grootte en orde verſchillen. Dewijl nu deze ruimte een voorwerp der aanſchouwing is, maar door de zinnen niet kan waargenomen worden, moet zij dus een gewrocht der dichtende verbeeldingskracht wezen; en daar de gewrochten van dit vermogen *voorſtellingen* zijn, kunnen wij deze ruimte noemen eene *voorgeſtelde* ruimte, of de ruimte in de voorſtelling; of ook, daar zij niet van empiriſchen oorſprong en evenwel *noodzakelijk* is, *de ruimte a priori*.

Daar zij intusſchen eene *noodzakelijke* voorſtelling is, moet zij geenszins gelijk geſteld worden aan die toevallige, willekeurige of onwillekeurige, gewrochten der verbeeldingskracht, welke nu eens opgewekt worden, en dan wederom verdwijnen. Zij is noodzakelijk voor de betrekkelijke ruimte, dat is, om ons eene klare voorſtelling van de gemelde orde der uitwendige voorwerpen, waarvan zij als het ware de algemeene bergplaats is, te geven. In haar trekt de verbeeldingskracht lijnen, vlakken, vervaardigt figuren, oppervlakten, meetkundige ligchamen enz.

3.

NADERE BESCHOUWING VAN HET VERSCHIL TUSSCHEN DE BETREKKELIJKE EN VOLSTREKTE RUIMTE.

Eene nadere beſchouwing der verſcheidenheden van betrekkelijke en volſtrekte ruimte zal ter opheldering van beide kunnen dienen. Hier de meest gewigtige:

1°. De eerſte verſcheidenheid is diegene, waarvan reeds melding gemaakt is. *De betrekkelijke ruimte verdwijnt met de dingen*, even zoo als elke andere betrekking en orde der dingen verdwijnt, zoodra deze ophouden te beſtaan. De wolk, welke wij aan den hemel zien, heeft eene bepaalde grootte, vorm, bepaalde afſtanden en rigtingen ten opzigte van andere wolken en voorwerpen, alsmede beweging, dat is, verandering van rigting en afſtand; en dit alles kan door ons oog waargenomen of uit de waarnemingen afgeleid worden. Maar zij wordt in regen opgelost; zij verdwijnt, en met haar verdwijnen ook dadelijk al de opgenoemde betrekkingen en bepalingen, en, indien daarover geſproken wordt, bedoelt men het voorledene, niet het tegenwoordige.

Daarentegen is *de volſtrekte ruimte* een voorwerp op zich zelve, dat wij ons voorſtellen, maar nooit kunnen waarnemen, dat onveranderlijk, onbewegelijk

is,

is, en, uit hoofde van de beſtendige beweging der dingen in het heelal, door dezelve onvolmaakt vertegenwoordigd wordt. De wolk is, bij voorbeeld, in een bepaald gedeelte dezer ruimte ſlechts een oogenblik, uit hoofde van hare eigene beweging en van de beweging der aarde.

Zonder de *volſtrekte* ruimte, kunnen wij geene *betrekkelijke* ruimte, en ook geene *ware beweging* denken. Om eene ware beweging zich voor te ſtellen, moet er iets zijn, dat *onbewegelijk* is, en dit is de volſtrekte ruimte zelve. Door de beweging onzer aarde zullen wij ons, hoe langer hoe meer, van de plaats verwijderen, waar wij thans zijn, tot dat wij na een half jaar wederom tot dezelve naderen. Indien de zon geene voortgaande beweging had, zouden wij, na *een* jaar tijds, nagenoeg wederom op dezelfde plaats teruggekeerd zijn, waar wij ons thans bevinden, en die plaats is *een deel der onveranderlijke en onbewegelijke ruimte*, doch ſlechts denkbeeldig.

2°. De ruimte (het volume) van een ligchaam en deszelfs afſtand van andere ligchamen is, gelijk al hetwelk door zintuigelijke waarnemingen bekend wordt, *beperkt*, dat is: het ligchaam neemt eene zekere bepaalde ruimte in, rondom welke eene andere is, en heeft een zekeren bepaalden afſtand van een ander ligchaam, welke grooter kan gedacht worden.

Daarentegen is de volſtrekte ruimte zonder eenige perken, en is, voor zoo verre, *oneindig* te noemen. Wij kunnen ons zeer wel voorſtellen, dat het Heelal, en de ſom van alle hemelligchamen, bepaald is, (hoe groot dit getal, of hoe groot de ruimte, door het Heelal vervuld, ook zijn moge) maar *het is ons geheel onmogelijk, perken der geheele volstrekte ruimte te denken.* Onze verbeelding plaatst rondom elke ruimte, hoe groot ook, eene andere, zoodat zij dus elke ruimte tot een gedeelte van eene grootere maakt. Zoo is het ook gelegen met de regte lijn en het vlak. Elke bepaalde regte lijn en ieder bepaalde vlakke figuur is een deel van eene grootere lijn en van eene grootere figuur; en beide worden dus beſchouwd, als onbepaald te kunnen vergroot worden. (*a*).

3°. Of de dingen, welke zich in de ruimte bevinden, in het oneindige al dan niet deelbaar zijn, kunnen wij, althans door de waarnemingen, niet beſlisſen. Onze zintuigelijke waarnemingen zijn beperkt; wanneer de deeling tot een zekeren graad gekomen is, dan worden de deelen, zelfs voor het, met het ſterkſte microscoop gewapend, oog onzigtbaar.

(*a*) De zuivere onzigtbare dampkringslucht, waarin wij geen voorwerp zien en de ſtarrenhemel, waar het oog slechts lichtende punten, en geene perken ontwaart, verlevendigen en wekken op de voorſtelling van die volstrekte, onbewegelijke en oneindige ruimte.

baar. Zij kunnen ons dus niet leeren, of de natuur en kunst in de verdeeling onbepaald, dan ſlechts tot eenen zekeren graad voortgaan, of er ware Atomen zijn, dan of zij er niet zijn. Maar bij de verdeeling der volſtrekte ruimte vindt de verbeelding evenmin perken, als bij de zamenſtelling. Om dezelfde reden dus *waarom*, en in dezelfde beteekenis, *waarin* wij de volſtrekte ruimte oneindig groot noemen, zeggen wij ook, *dat dezelve en elk deel derzelve, zoo als ook elke lijn en figuur in het oneindige deelbaar is.* Eene ruimte, eene lijn en figuur, hoe klein ook, die niet uit deelen zou beſtaan, is ondenkbaar.

Aanmerking 1. Hetgene dat hier gezegd is, dient alleen *ter ontwikkeling der voorſtelling van de meetkundige ruimte.* Eene metaphyſische beſchouwing van dezelve is hier niet noodig. Alleen moeten wij nog doen opmerken de vereeniging en ſcheiding, welke hier door het verſtand en de verbeelding geſchiedt. De verbeelding ſtelt gedeelten der volſtrekte ruimte zamen, ſcheidt dezelve naar willekeur, en gaat hierin onbepaald voort. Het verſtand volgt haar in de zamenſtelling *door het meten*, dat is: *door de vergelijking van de voortgebragte grootheid met eene andere van dezelfde ſoort, en door het gebruik van de hieruit voorkomende getallen.* Gelijk de verbeelding de grootheden vermeerdert, vergroot het verſtand de getallen, *door bijvoeging van eenheden.*

In het begrijpen en ſchrijven van groote getallen heeft de menſchelijke geest het verre gebragt. Reeds ons tientalſtelſel getuigt hiervan, doch wij kunnen ook getallen voorſtellen van deze vorm $\begin{matrix} & & e \\ & d & \\ c & & \\ b & & \\ a & & \end{matrix}$ zoo als b. v. $\begin{matrix} & & 5 \\ & 100 & \\ 1c & & \end{matrix}$ toont reeds een getal aan, hetwelk, volgens het tientalſtelſel geſchreven, uit eene millioen nullen zou beſtaan, vóór welke de eenheid geplaatst is. Doch het verſtand kan daarenboven ook de eenheid zelve vergrooten. Van eene el klimt het op tot eene mijl, van daar tot den radius der aarde, voorts tot den afſtand der zon van de aarde, en van daar tot den afſtand der zon van de naaste vaste ſtar. Het verſtand vindt dus volſtrekt geene moeite, om, door middel van zekere begrippen, zoo als van maat en getal, de verbeelding in derzelver vergrooting te volgen. Even zoo gemakkelijk volgt het de verbeelding in derzelver ſcheiding, dewijl hier ſlechts de omgekeerde handelwijze noodig is. Het maakt de maat kleiner, dat is, gebruikt eene breuk, waarvan de teller de eenheid is, zoo als

$$\left(\tfrac{1}{10}\right)^m \qquad \left(\tfrac{1}{1000}\right)^{1000} \qquad \text{of } \left(\tfrac{1}{a}\right)^{\begin{matrix} & & e \\ & d & \\ c & & \\ b & & \end{matrix}}$$

Zoo gemakkelijk als het voor het verſtand is, om het groote en kleine door zekere begrippen te denken, en te behandelen, zoo moeijelijk valt het de verbeelding, om, als het ware, de grootheid, welke

zij

zij door zamenſtelling gevormd heeft, door te loopen en te overzien. Geene menſchelijke verbeeldingskracht vat de grootte der zon.

Men kan ook met regt op de onbeperkte verdeeling door de verbeeldingskracht aanmerken, dat, wanneer een voorwerp zoo klein wordt, dat hetzelve niet meer door het gevoel en het gezigt waarneembaar is, hetzelve ook in dien graad van kleinheid door haar niet voorgeſteld, en dus nog minder gedeeld kan worden. Wij zouden dus kunnen zeggen, dat de verbeelding, alvorens het kleine voorwerp te deelen, hetzelve eerst onder een microscoop plaatst, aan hetwelk zij eene willekeurige vergrooting kan geven.

De verbeeldingskracht komt noch door zamenſtelling tot het oneindig groote, noch door ſcheiding tot het oneindig kleine. Zij kan het eene, even zoo min als het andere, voorſtellen; doch dit is in hare natuur gegrond. *Zij is een vermogen van zamenſtelling.* Zij kan niets voorſtellen, waarbij zij niet nog iets zou kunnen voegen. Het eenvoudige kan ook nooit door haar worden voorgeſteld. Zij vindt dus overal deelen in hare gewrochten. Eene gewigtige beperking van het kenvermogen des menschen is daarin gelegen, dat hij voor het eenvoudige geen voorstelling vermogen bezit.

Het verſtand, hoe gemakkelijk hier ook deszelfs voortgang zijn moge, komt insgelijks nooit door ver-

vermenigvuldiging tot het oneindig groote, noch door deeling tot het oneindig kleine. De *nul* is niet het oneindig kleine, het is, *niets* en heeft dus ook geene hoedanigheden.

Het *oneindig groote en kleine* is dus flechts een idée, tot hetwelk iets kan naderen, zonder hetzelve ooit te bereiken. Het menſchelijk begrip is, als het ware, *in het worden van dit idee*, maar het blijft ſteeds in het worden, en bereikt nooit het idée zelf. Daarom moet het menſchelijk verſtand zich beide als *wordende*, en nooit als reeds *zijnde* voorſtellen. Eene oneindige globe is eene tegenſtrijdigheid, dewijl her middelpunt overal is, en er toch flechts één middelpunt kan zijn — of in het algemeen, eene tegenſtrijdigheid is in de uitdrukking gelegen, *iets van eene zekere gedaante als oneindig zich voorſtellen*, want gedaante veronderſtelt perken en uiteinden, maar perken en uiteinden zijn ſtrijdig met het oneindige.

Aanmerking 2. Het is in het denkbeeld van volſtrekte en betrekkelijke ruimte gegrond, dat de eerſte overblijft, wanneer men in zijne voorſtelling alle dingen uit de ruimte neemt. Maar hieruit volgt niet, dat de *volſtrekte ruimte*, door *aftrekking* (abſtractie) alleen, zou voortgebragt zijn. Immers is de voorſtelling der volſtrekte ruimte noodzakelijk en oorſpronkelijk; zonder dezelve is geene zinnelijke waarneming mogelijk; en dus ook niet het denkbeeld van *betrek-*

ke-

kelijke ruimte. Daarenboven zouden wij, door abſtractie der dingen, welke wij in de ruimte zien, alleen komen tot de voorſtelling van die bepaalde ruimte, waarin zij zijn, maar niet tot het denkbeeld eener *oneindige* ruimte.

4

MEETKUNDE.

De zuivere Meetkunde, in de meest uitgeſtrekte beteekenis van het woord, is *de wetenſchap, welke beſchouwt de volſtrekte ruimte en al hetgeen dat in deze ruimte, als daartoe behoorende, en door dezelve alleen beſtaande, voorgeſteld wordt.* Zij onderzoekt intusſchen alleen, hoedanig wij ons deze voorwerpen voorſtellen, daaruit begrippen en beſluiten vormen, maar niet derzelver natuur en oorſprong, welk onderzoek zij aan de Wijsbegeerte overlaat. (*a.*) Wanneer zij de beſluiten uit deze beſchou-

(*a*) Over de ruimte is uitvoerig gehandeld in *mijne bijdrage tot de beschouwing van de waarheid der menschelijke kennis*, uitmakende het vijfde deel der *gedenkschriften in de Hedendaagsche talen* van de derde klasse van het Koninklijk-Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, en Letterkunde en schoone kunsten. Amsterdam; 1836.

ſchouwing toepast op de betrekkelijke ruimte, wordt zij de *toegepaste Meetkunde* genoemd.

De zuivere *Meetkunde* is een deel der zuivere *Wiskunde* (Matheſis). De *zuivere Wiskunde* handelt over *de grootte en vorm der grootheden*. Eene *grootheid* is, welke uit gelijkſoortige deelen beſtaat. *Meetkunde* daarentegen handelt over de vier ſoorten van grootheden, *hoeken*, *lijnen*, *vlakken* en *meetkundige ligchamen*. Een *meetkundig ligchaam* is een gedeelte der ruimte. Het *volum* dus van een voorwerp der natuur en kunst is een *meetkundig ligchaam*. *Meten* is bepalen, hoe dikwijls eene grootheid, of een deel van dezelve (*de gebroken eenheid*) in eene andere bevat zij. De eerſte noemt men de *maat of eenheid*, de tweede, de *te meten grootehid*. Uit het meten ontſtaan de *getallen*, welke of *benaamde* of *onbenaamde getallen* zijn, dat is, waarbij de ſoort van eenheid bepaald, of niet bepaald is. De zuivere Arithmetica handelt over de *niet benaamde* getallen, en kan als de *zuivere algemeene* Wiskunde beſchouwd worden. Uitvoeriger is over deze en over andere hiertoe behoorende bepalingen gehandeld in mijne *Prolegomena ad elementa Matheſeos*, bl. 1—54. Hier is het toerijkend, de betrekking der Meetkunde tot de Wiskunde aangewezen te hebben.

Aanmerking. Wij hebben gezegd, dat de verbeelding de volſtrekte ruimte, en al derzelver deelen als *onbewegelijk* ſtelt, en daarin allerlei ſoorten

van

van lijnen, figuren, vlakken, en meetkundige ligchamen trekt en vormt. Maar zij gaat verder. Zij geeft ook aan deze lijnen, figuren en vlakken beweging, verplaatst dezelve, even als of dezelve *wezenlijke* ligchamen waren, met dat onderscheid, dat deze voorwerpen elkander kunnen *doordringen*, dat is, hetzelfde gedeelte der ruimte tegelijk kunnen innemen, hetgene bij wezenlijke ligchamen onmogelijk is. Dit is flechts een hulpmiddel voor het aanfchouwing- en voorftellingvermogen, dat gewoon is aan de betrekkelijke ruimte, derzelver verandering, aan de beweging en verplaatfing der ligchamen en verfchijnfelen. Wanneer dit hulpmiddel, dat hoogst gewigtig is, en hetwelk wij in de Meetkunde niet kunnen ontberen, alleen dient ter verduidelijking, en op het befluit geen' anderen invloed heeft, dan kan hetzelve veilig gebruikt worden. Wanneer EUCLIDES, bij voorbeeld, wil bewijzen, dat twee parallelopipeda (dat is: twee deelen der ruimte, die den vorm hebben van parallelopipeda), welke gelijke en gelijkvormige bafis en gelijke hoogte hebben, aan elkander gelijk zijn, dan plaatst hij dezelve zoodanig, dat zij dezelfde basis, en dus ook een gemeenfchappelijk deel der ruimte hebben. Dit kan gefchieden, *vermits de vorm en grootte van een deel der ruimte niet afhangt van de plaats, waar hetzelve is.* Wanneer men zegt, dat een cirkelvlak ontftaat, wanneer eene bepaalde regte lijn zich in een vlak zoodanig be-

beweegt, dat het eene uiteinde onbewegelijk is, geeft men hierdoor alleen te kennen de, op eene zekere wijze elkander opvolgende, voorſtellingen van deelen van het cirkelvlak, welke deelen door de verbeeldingskracht tot een geheel vereenigd worden. KANT(*a*) tracht zelfs de ſtelling te bewijzen, dat de zamenſtelling van twee bewegingen van een en hetzelfde punt ſlechts daardoor kan gedacht worden, dat de eene beweging in de volſtrekte ruimte geſchiedt, en in plaats van de andere beweging geſteld wordt eene beweging van de betrekkelijke ruimte, welke met gelijke ſnelheid in de tegengeſtelde rigting geſchiedt.

Wij bedienen ons immers ook, gelijk wij reeds opgemerkt hebben, van andere zinnelijke hulpmiddelen ter verduidelijking van het begrip. Om eene algemeene eigenſchap van eenen driehoek voor te ſtellen, teekenen wij eenen driehoek. Doch het geteekende is geen driehoek; het zijn *drie ligchamen*, geplaatst op eene ongelijke oppervlakte. De driehoek wijst voorts aan eenen *bepaalden driehoek*, zoowel wat de hoeken, als wat de zijden aangaat; en wij hebben eenen driehoek noodig, die het geſlacht vertoont, en dus al de verſchillende ſoorten in zich bevat. Dit is onmogelijk. Doch wij nemen het ligchamelijke niet in aanmerking, en zien voorts ſlechts op die hoedanig-

(*a*) *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, bladz. 20.

nigheden, welke de geteekende driehoek met alle andere driehoeken gemeenſchappelijk heeft.

EERSTE AFDEELING. TWEE PUNTEN.

5.

OVER DE BETREKKING TUSSCHEN TWEE PUNTEN.

Het eenvoudigſte kenteeken der ruimte is, dat dezelve een onbepaald getal plaatſen bevat, welke men in de Meetkunde *punten* noemt. Wij kunnen daarvan ſlechts een ontkennend kenteeken aanwijzen, te weten: *dat eene punt geene deelen heeft.* Dit is reeds in de voorſtelling zelve. Had eene plaats of punt deelen, dan zoude zij niet *één* plaats of *één* punt, maar meerdere plaatſen of punten zijn.

Het is dus geene grootheid, omdat het uit geene deelen beſtaat. Dewijl een punt voor het overige tot de ruimte alleen betrekking heeft, wordt hetzelve hierdoor genoegzaam onderſcheiden van andere voorwerpen, welke ook als *uit geene deelen beſtaande* gedacht worden.

6.

BETREKKING VAN TWEE PUNTEN IN HET ALGEMEEN.

Zoodra de verbeelding zich twee punten *A* en *B* voorſtelt, is ook terſtond voor den geest aanwezig de voorſtelling van eene dubbelde betrekking dezer punten, welke wij door de woorden *afſtand* en *rigting* aanwijzen. Deze vereeniging is zoodanig in ons voorſtellingsvermogen gegrond, dat wij ons geene twee punten te gelijk, zonder deze dubbelde betrekking, voor den geest kunnen brengen.

Aanmerking. Men moet hier wel onderſcheiden, afſtand en rigting van twee punten *bepalen*, en zich dezelve bloot *voorſtellen*. Wij ſpreken hier van het laatſte. Tot het *bepalen* is vergelijking noodig. Willen wij den afſtand bepalen, dan moeten wij denzelven *meten*, dat is met eenen anderen afſtand vergelijken; willen wij de rigting bepalen, dan moeten wij dezelve met eene andere rigting vergelijken, waardoor een *hoek* ontſtaat. Dus kan geene rigting zonder eenen hoek bepaald worden. (zie bl. 67) Door deze bepaling leeren wij inzien, *welke de afſtand, en de rigting is.* In verre de meeste gevallen ſtellen wij ons beide voor, zonder dezelve eenigzins te bepalen.

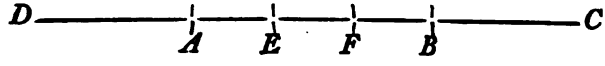
Dewijl elke meetkundige grootheid zoo als breedte, leng-

lengte, hoogte, inhoud tot afſtand van punten wordt teruggebragt, en elke meetkundige form tot rigting, geldt dus het hier gezegde algemeen. Wij zien geen ligchaam met duidelijke bewustheid, zonder ons eenige grootte en gedaante van hetzelve voor te ſtellen, maar welke deze grootte en gedaante zij, moet eerst door vergelijking blijken, namelijk door het meten van afſtanden en hoeken.

7.

REGTE LIJN.

De verbeelding verzinnelijkt deze betrekking door een beeld, hetwelk wij noemen eene *regte lijn A B*, geplaatst of getrokken tusſchen de punten *A* en *B*.



De punten *A* en *B* zijn dus de perken of eindpalen (*termini*) dezer lijn.

8.

AANMERKING.

Deze werking der verbeeldingskracht; om een punt met een ander punt, door middel eener regte

 lijn,

van *A* tot *B*. Hieruit volgt, dat in de lijn *A B* zelve een onbepaald getal lijnen zijn, namelijk, zoo vele lijnen, als er vereenigingen zijn van twee punten, die zich in de lijn *A B* bevinden. Eene lijn is dus eene grootheid, uit een onbepaald getal van lijnen beſtaande, welke grooter of kleiner dan eene andere lijn zijn kan.

II.

CONTINUUM.

Men noemt *een Continuum of gedurig zamenhangende grootheid, die grootheid, waarvan de deelen zoodanig zamenhangen, dat daar, waar het eene deel ophoudt, onmiddelijk het andere volgt, hoe klein de deelen ook genomen worden, of hoeverre ook de verdeeling moge gaan.*

Zoodanig een Continuum is de volſtrekte ruimte, welke dus uit deelen beſtaat, die kleiner zijn, dan elke te bepalen grootheid. Een Continuum is dus in het oneindige deelbaar in die beteekenis, welke op bl. 40—43 ontwikkeld is.

12.

DIFFERENTIALE GROOTHEID.

Een *deel* van een Continuum, dat kleiner is dan el-

elke door het verſtand te bepalen, of gegeven grootheid (bl. 42), noemt men de *Differentiaal van hetzelve.* Men kan het ook noemen het *oneindig kleine*, ook het *kleinſte*, doch in eenen betrekkelijken zin, namelijk in betrekking tot elke bepaalde of gegevene grootheid. Wat het kleinſte zij in eene volſtrekte (abſolute) beteekenis, dit kunnen wij niet aanwijzen; het zou = o zijn, indien o als deel eener grootheid kon beſchouwd worden.

Volgens de bepaling kan dus eene differentiaal grooter zijn dan eene andere — zelfs kunnen de differentialen van verſchillende orde zijn, zoodat de differentiaal der eerſte orde tot die van de tweede ſtaat, als eene eindige grootheid ſtaat tot de differentiaal der eerſte orde enz.

Eene *differentiale* grootheid kan dus ſlechts door een begrip, dat is door zekere kenteekenen, maar noch door de aanſchouwing, noch door eenig getal bepaald, noch aan eene gegevene grootheid gelijk geſteld geworden. Er kan dus ook geene gegevene grootheid of getal in derzelver plaats geſteld worden, waardoor dezelve zich wezenlijk onderſcheidt van algemeene of onbepaalde getallen en grootheden.

Overigens is het ongerijmd, eene differentiale grootheid gelijk aan o te ſtellen, want van geene grootheid kan dezelve een deel bedragen, want *o* oneindige malen genomen kan nooit iets anders dan *o* tot product geven.

Hetgene hier gezegd is van de deelen van een Continuum, geldt ook van deszelfs veranderingen, welke dus ook *differentialen* kunnen zijn.

13.

AANMERKING.

Ter nadere opheldering hiervan moge het volgende dienen.

Eene eindige grootheid is diegene, welke *door eene, werkelijk in de aanſchouwing gegevene, eenheid*, zoo als door eene el, door eene vierkante en cubiek el, of door derzelver bepaalde deelen kan *gemeten* worden. (*a*) Eene grootheid is *oneindig groot*, of *oneindig klein*, wanneer dezelve grooter of kleiner is dan elke *eindige* grootheid.

Het oneindig groote en kleine is dus ſlechts denkbeeldig, een zeker grensbegrip, aanwijzende datgene, waartoe eene eindige grootheid door vermenigvuldiging of deeling ſteeds kan naderen, zonder hetzelve ooit te bereiken. Het is geene, door de aanſchouwing gegevene, maar door een kenteeken bepaalde, groot-

(*a*) Beneden den tekst, bl. 46.

grootheid. (*o.*) Wij kunnen dit grensbegrip in de Wiskunde bij de beſchouwing van een continuum niet ontbeeren.

Laat een Continuum voorgeſteld worden door de *onbenaamde eenheid*, dan is hetzelve $= 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots$ waar m aanwijst, het hoeveelſte lid $\frac{1}{2^m}$ zij. Men vraagt: welk is het laatſte lid van deze reeks? Dit is grooter dan o, en ſteeds kleiner dan $\frac{1}{2^m}$ zoo lang m een bepaald getal is, hoe groot hetzelve ook zijn moge. Het is dus eene differentiale grootheid, waarvan wij kunnen zeggen, dat dezelve kleiner is dan $\frac{1}{2^m}$, doch dat $\frac{1}{2^m}$ des te meer tot dezelve nadert, hoe grooter m is.

Laat de zijde van een vierkant insgelijks door de onbenaamde eenheid voorgeſteld worden, dan is de Diagonaal $= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} \cdots + \frac{a}{10^{m-1}} + \cdots$ waar a aanwijst een van de 9 eerſte getallen 1. 2. 3... 9.

Het laatſte lid is hier een differentiaal der Diagonaal

(*o*) Men vergelijke hiermede J. F. FRIES, *Die Mathematische Naturphilosophie*, 1822.

naal, tot welke $\frac{a}{10^{m-1}}$ des te meer nadert, hoe grooter m is.

Doch voornamelijk hebben wij deze differentialen, of deze grensbegrippen noodig, bij de beſchouwing der veranderingen, welke de Continua ondergaan, en der betrekking van die veranderingen.

Zoodra wij aannemen, dat een Continuum, vóór dat het zijne tegenwoordige grootte verkregen heeft, *alle trappen van grootte heeft doorgeloopen*, moeten wij de veranderingen, welke hetzelve ondergaan heeft, als differentialen beſchouwen.

Wanneer in de aequatie van twee Continua (bij voorbeeld van twee Coördinaten eener kromme lijn) de grootheid x eene verandering ondergaat, zal ook y eene verandering ondergaan, doch er is geene, welke de kleinſte zou wezen. Indien x wordt $x + \Delta x$ en y wordt $y + \Delta y$, en Δx eene bepaalde eenheid, of een bepaald gedeelte der eenheid, dat is, eene gegevene grootheid is, dan zal er altijd eene oneindige reeks van termen zijn, bevat tusſchen x en $x + \Delta x$, en aan elken term van deze reeks moet de grootheid x achtervolgens gelijk geweest zijn, indien zij alle trappen van grootte heeft doorgeloopen, van x af (hetwelk ook $= o$ kan zijn) tot $x + \Delta x$ toe. Terwijl intusſchen x deze oneindige reeks heeft doorgeloopen, heeft ook y zoodanig eene doorgeloopen, omdat derzelver verandering af-

afhangt van de verandering van x. Dus om alle trappen van verandering eener veranderlijke grootheid aan te wijzen, moeten wij de elkander opvolgende veranderingen als *differentialen* beſchouwen. Wanneer wij dezelve aanwijzen door de teekenen ∂x en ∂y, dan kunnen wij de betrekking tusſchen ∂y en ∂x uit de aequatie $y = \phi.(x)$, dat is uit de aequatie, waarin x en y en veranderlijke grootheden voorkomen, afleiden. Uit de verſchillende betrekking tusſchen ∂y en ∂x, welke afhangt van de betrekking tusſchen y en x, zien wij, dat, hoewel de differentialen kleiner zijn, dan elke eindige of bepaalde grootheid, dezelve evenwel onder elkander zeer ongelijk kunnen zijn.

Uit het beſchouwde kunnen wij afleiden de beginſelen der Differentiaal-rekening, zoo als:

1. Differentialen zijn onbepaalde, niet gegevene, grootheden, voor vermeerdering en vermindering vatbaar, en in verſchillende betrekking tot elkander ſtaande, doch welke kleiner zijn dan elke gegevene of bepaalde grootheid.

2. Wanneer zij bij eene eindige grootheid gevoegd of daarvan afgetrokken worden, hetzij enkelvoudig of met een eindig getal vermenigvuldigd zijnde, veranderen zij derzelver eindige waardijen niet, zoodat $x \pm a\partial x = x$; omdat het verſchil tusſchen x en $x \pm a\partial x$ niet door eene eindige grootheid kan aangetoond worden. Indien er een bepaalbaar verſchil

was

was tusſchen x en $x \pm a\,\delta x$, dan zou δx geene differentiale maar eene *eindige* verandering zijn.

3. De betrekking tusſchen δx en δy kan een eindig getal zijn, en hangt af van de betrekking tusſchen x en y.

4. Wanneer dit getal afhangt van de veranderlijke grootheid x, dan kan hetzelve als eene functie van x beſchouwd worden, en men kan dus de betrekking tusſchen deszelfs differentiaal en δx onderzoeken.

Indien b. v. $\frac{\delta y}{\delta x} = a x^m$ dan is $\delta y = a x^m \delta x$.

Dat hieruit de gronden der Differentiaal-rekening kunnen afgeleid worden, zal wel geen nader betoog noodig hebben. De eenvoudigſte eerſte afleiding is de volgende:

Zij $y = x^n$, dan is $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots$

dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (n x^{n-1}) + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2} x^{n-2} \Delta x + \frac{n.\,(n-1)\,(n-2)}{1.\,2.\,3} x^{n-3} (\Delta x)^2 + \ldots\ldots$

dus volgens 2. is $\frac{\delta y}{\delta x} = n x^{n-1}$. Laat $\frac{\delta y}{\delta x} = y'$ zijn, dan is $\delta y' = n.\,(n-1)\,x^{n-2}\,\delta x$; zij $\frac{\delta y'}{\delta x} = y''$, dan is $\delta y'' = n.\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\,\delta x$, enz.

14.

GEVOLG.

De regte lijn is een Continuum (11), want, bij voorbeeld, in hetzelfde punt, waarin het deel AE (7) van de lijn AB eindigt, begint het deel EC. Geen bepaald deel der lijn AB, hoe klein hetzelve ook zijn moge, is het kleinſte, want tusschen de punten A en E kan altijd nog een derde punt gedacht worden, vermits een punt geene uitgebreidheid heeft.

Eene regte lijn is dus in het oneindige deelbaar, en heeft hare differentialen. Wij ſpreken intusſchen hier alleen van de regte lijn, voor zoo verre zij eenen afſtand aanwijst tusſchen twee punten, zoodat dus regte lijn en afſtand tusſchen twee punten hetzelfde beteekenen.

15.

AANMERKING.

Men zegt dus oneigenlijk: *de regte lijn is eene lengte* (*p*); want met hetzelfde regt kan gezegd worden: *de regte lijn is eene rigting.* Naauwkeuriger is

(*p*) Euol. Def. 2.

is de uitdrukking: *de regte lijn toont eene rigting aan en eene lengte*, dat is: eene rigting en eenen afſtand.

De lengte van de lijn noemt men ook *eene* afmeting, en men is daarom gewoon te zeggen: *de regte lijn heeft ſlechts* EENE *afmeting*, namelijk diegene, welke men *lengte* noemt. Deze en andere, meer of minder onnaauwkeurige, uitdrukkingen toonen eigenlijk alleen aan, dat de regte lijn eenen afſtand tuſſchen twee punten aanwijst.

16.

RIGTING VAN TWEE PUNTEN.

Wat aangaat de rigting, welke door de lijn *A B* aangetoond wordt, dezelve is tweevoudig: *de rigting van A naar B, en die van B naar A.* Deze rigtingen worden gezegd *tegengeſteld* te zijn, de eene ten opzigte van de andere. Men kan willekeurig de eene rigting *poſitief*, de andere *negatief* noemen, terwijl de eerſte door het teeken +, en de andere door het teeken — aangewezen wordt. Derzelver beſchouwing is van het grootſte gewigt in de Wiskunde, vooral in de toepaſſing der algemeene Rekenkunde op de Meetkunde, in de leer van het evenwigt en van de beweging. Hierbij is vooral op te merken, dat het, ten opzigte van de rigting, geheel niet aankomt op de lengte der lijn of den afſtand

ſtand der punten, en dat de verbeelding de rigting zoodanig voorſtelt, als in eene onbepaalde lijn, zoo wel van *A* naar *B* en verder, als van *B* naar *A* en verder voortgaande. Hiervandaan het zoogenoemde Postulaat: *men kan eene regte lijn naar willekeur aan beide zijde verlengen* (*q*); welke ſtelling niet anders aanwijst, dan deze eenvoudige werking der verbeeldingskracht bij de voorſtelling de rigting door eene regte lijn.

Eene regte lijn toont dus *twee* rigtingen, maar ſlechts *eenen* afſtand aan. Want, wat den afſtand aangaat, is het geheel onverſchillig, of de lijn van *A* naar *B* of van *B* naar *A* gaat.

Gelijk men den afſtand der punten *A* en *B* noemt de *lengte der lijn A B*, zoo noemt men ook de twee rigtingen dezer punten *de rigtingen der lijnen A B, en B A.*

Eene rigting houdt nergens op, maar een afſtand heeft perken. Ten opzigte van de rigting is eene regte lijn oneindig groot. Elke bepaalde regte lijn is dus een deel van de oneindige lijn, welke dezelfde rigting aanwijst.

De afſtand is de grondſlag van alle *grootheid* (quantitas); de rigting is de grondſlag van alle *vorm* (forma) der meetkundige grootheden.

(*q*) Eucl. Post. 2.

17.

GEVOLGEN.

Indien men vereenigt, en vergelijkt, hetgene, dat van den afſtand en de rigting van twee punten gezegd is, dan volgt daaruit onmiddellijk:

1°. *Elk paar punten, in eene regte lijn genomen, heeft dezelfde rigting als elk paar andere punten in dezelfde regte lijn. Elk gedeelte dus van eene regte lijn wijst dezelfde rigting aan, welke door de geheele lijn wordt aangewezen.* Hieruit volgt:

2°. *Twee onbepaalde regte lijnen, waarvan twee punten overeenkomen, dat is, welke twee punten gemeenſchappelijk hebben, vallen in elkander, of zijn, wat de rigting aangaat, dezelfde regte lijnen* (*r*).

Deze ſtelling wordt ten onregte voor een *axioma* gehouden. Zij volgt onmiddellijk uit de voorſtelling der rigting van twee punten, welke bij lijnen, die in lengte onbepaald zijn, alleen in aanmerking kan komen.

3°. *Gelijk het ten opzigte van de rigting geheel niet aankomt op de lengte der lijn, zoo komt het ook, ten opzigte van de lengte der lijn, geheel niet aan op derzelver rigting.* Twee lijnen kunnen aan el-

(*r*) VAN SWINDEN, *Meetkunde*, AX. 1.

elkander gelijk zijn, al hebben dezelve verſchillende rigtingen. De middellijnen eener globe toonen alle mogelijke ongelijke rigtingen aan in de ruimte; en nogtans zijn al deze middellijnen aan elkander gelijk. Dus de gelijkheid van twee lijnen heeft alleen betrekking tot den afſtand, welken zij aanwijzen, zoodat dus de ſtelling: *twee lijnen zijn gelijk* beteekent, *twee afſtanden zijn gelijk.*

4°. Dewijl dus, bij het onderzoek der lengte van eene lijn, derzelver twee rigtingen geheel niet in aanmerking komen, plaatst men, in zijne verbeelding, om te onderzoeken, of twee lijnen al dan niet gelijk zijn, beide zoodanig, dat zij dezelfde rigting aanwijzen, en dat het beginpunt van de eene op het beginpunt van de andere valt. Indien dan ook de twee andere eindpunten op elkander vallen, dan zijn de lijnen aan elkander gelijk. Vallen dezelve niet op elkander, dan is die lijn de grootſte, welker eindpunt buiten de andere lijn valt. Dit is een *axioma* (a), en toont aan *de wijze, op welke het verſtand met behulp der verbeeldingskracht de gelijkheid van grootheden, tot deze ſoort behoorende, onderzoekt, en daarover oordeelt.*

Aanmerking. Dit is een bijzonder geval van de al-

(a) EUCLIDES, Ax. 8, welk axioma aldaar betrekking heeft tot lijnen, gedeelten van platte en kromme vlakken, en tot ligchamen: VAN SWINDEN, *Meetkunde*, Ax. 3.

algemeene handelwijze, waardoor wij over de gelijkheid en ongelijkheid van twee meetkundige grootheden, zoo als van hoeken, figuren, vlakken en (meetkundige) ligchamen oordeelen, door dezelven op elkander of in elkander te plaatsen. Dit noemt men het *beginſel van overeenkomst*, en hier omtrent geldt het algemeene axioma: *indien twee meetkundige grootheden overeenkomen, dan zijn dezelve gelijk.*

Eene tweede handelwijze is die, welke op meting berust. Men kiest daartoe eene maat of eenheid, van dezelfde ſoort als de te meten grootheid. Indien beide even veel eenheden, of gedeelten van eenheden bevatten, dan zijn dezelve gelijk; zoo niet, dan is diegene de grootſte, welke het grootſte getal van eenheden heeft. Deze handelwijze berust op — of wordt aangewezen door de axiomata.

Twee grootheden die aan eene derde gelijk zijn, zijn onder elkander gelijk. Twee grootheden zijn ongelijk, indien de eene aan eene derde gelijk is, en de andere daaraan ongelijk is.

TWEEDE AFDEELING.

DRIE PUNTEN, WELKE NIET IN EENE REGTE LIJN ZIJN.

18.

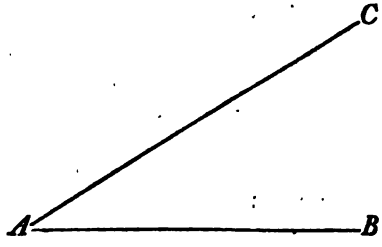
Op de beſchouwing der betrekking van twee punten, en van een onbepaald getal punten, welke in de-

dezelfde regte lijn liggen, volgt, in de natuurlijke orde, de beſchouwing der betrekking van drie punten, welke niet in éene regte lijn liggen.

19.

HOEK.

Fig. 1.



Laat *C* en *B* de twee punten zijn, *A* het derde punt. De lijn *A C* vertoont de rigting van *A* naar *C* en *A B* die van *A* naar *B*. Omdat de lijn *A C* niet op de lijn *A B* valt, is hier *verſchil van rigting van een punt ten opzigte van twee andere punten*, welk verſchil *hoek* genaamd wordt. De verbeelding maakt dus dezen hoek aanſchouwelijk, door twee regte onbepaalde lijnen, uit het derde punt naar de beide andere punten getrokken. Men kan dus ook deze bepaling geven: *Hoek is het verſchil van twee rigtingen, aangetoond door twee lijnen, welke elkander in één punt ontmoeten.* Deze twee lijnen worden *de beenen van den hoek en het punt, hetwèlk*

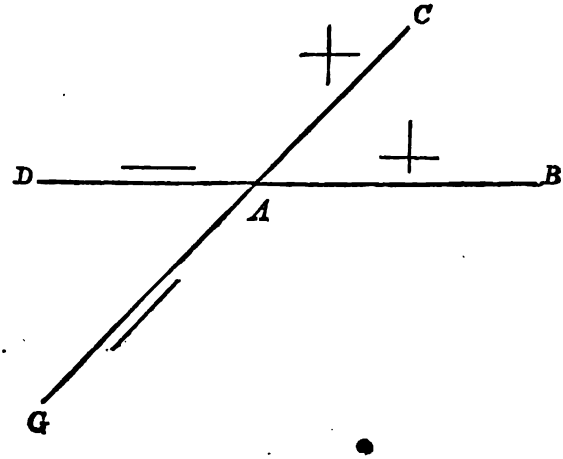
beide lijnen gemeenſchappelijk hebben, het toppunt van den hoek genoemd.

Aanmerking. Dit is de reden, waarom men den hoek uitdrukt door drie letters, aanwijzende de drie punten, waarvan de letter aan het toppunt de middelſte plaats heeft. — of ook alleen door de letter aan het toppunt, indien er geene dubbelzinnigheid is, dat is, indien niet hetzelfde punt het toppunt is van verſchillende hoeken. Men toont ook wel den hoek aan door ééne letter, tusſchen de beenen bij het toppunt geplaatst.

20

HOEKEN, DOOR DE SNIJDING VAN TWEE LIJNEN VOORTGEBRAGT.

Fig. 2.



Wan-

Wanneer de twee lijnen, welke den hoek vormen, aan beide zijden verlengd gedacht worden (gelijk dezelve altijd gedacht worden, indien ſlechts de rigting in aanmerking komt) (*t*), dan gaan zij door het gemeenſchappelijk punt *A*, waaruit van zelve volgt de ſtelling:

Twee regte lijnen kunnen elkander ſlechts in één punt ſnijden (*u*), welke gewoonlijk voor een axioma gehouden wordt. Zij is een gevolg van de ſtelling: *Eene lijn toont ſlechts twee rigtingen aan.* Twee lijnen, die elkander ſnijden, kunnen dus ſlechts vier rigtingen aanwijzen, die alle van het gemeenſchappelijk punt *A* uitgaan. Was er meer dan één punt van ſnijding, dan zouden er meer dan vier rigtingen zijn.

Noemen wij *A B* en *A C* de *poſitive* rigtingen, dan zijn *A D* en *A G* de *negative;* en daar er bij het ſnijpunt *A* vier verſchillende rigtingen zijn, moeten hierdoor zes verſchillen van rigtingen of zes hoeken ontſtaan, welke zijn:

De hoeken *B A D* en *L C A G* of *de verſchillen van twee tegengeſtelde rigtingen.* Het blijkt van zelve, dat deze twee verſchillen bij alle lijnen gelijk zijn. Immers daar de hoek *C A G* of dit verſchil niet verandert, waar zich ook de lijn *C G* bevinden moge, kunnen wij dezelve ook op *D B* plaatſen; alsdan val-

(*t*) Zie bl. 63.

(*u*) Van swinden, *Meetkunde*, Ax. 2, bl. 11.

vallen de lijnen in elkander, en de rigtingen, welke zij aanwijzen, zijn dezelfde. Hieruit volgt: (§ 16.)

Het verſchil tuſſchen twee tegengeſtelde rigtingen, is bij alle lijnen hetzelfde, en kan derhalve als maat bij alle hoeken gebruikt worden.

De hoek C A B is het verſchil tuſſchen de poſitive rigtingen der twee lijnen, en

De hoek D A G het verſchil tuſſchen de negative rigtingen.

De hoek G A B is het verſchil tuſſchen de poſitive rigting van de eerſte lijn A B, en de negative der tweede lijn A C; en de hoek C A D is het verſchil tuſſchen de negative rigting van de eerſte, en de poſitive der tweede lijn.

21.

TEGENGESTELDE, AANLIGGENDE EN REGTE HOEKEN.

De beenen van de hoeken $C\,A\,B$ en $D\,A\,G$ zijn zoodanig, dat die van den eenen hoek in tegengeſtelde rigtingen zijn der beenen van den anderen hoek. Dit geldt ook van de hoeken $C\,A\,D$ en $G\,A\,B$. Deze worden daarom de *tegenoverſtaande* of *tegengeſtelde hoeken* genoemd. Dat deze hoeken gelijk zijn, blijkt uit § 20 omdat $\angle C\,A\,B + \angle C\,A\,D = \angle G\,A\,D + \angle C\,A\,D = \angle C\,A\,B + \angle B\,A\,G$ dus $\angle C\,A\,B = \angle G\,A\,D$ en $\angle C\,A\,D = \angle B\,A\,G$.

Daarentegen hebben twee hoeken, zoo als $C\,A\,B$ en

en CAD, CAD en DAG, DAG en GAB, GAB en CAB *één* rigting gemeenſchappelijk, en worden daarom *aanliggende hoeken* genoemd. Zijn de twee aanliggende hoeken aan elkander gelijk, dan worden dezelve *regte hoeken* genoemd, en de gemeenſchappelijke lijn wordt gezegd *loodregt te ſtaan op de andere*, *of eene loodlijn te zijn*. *De regte hoek is dus de helft van den hoek* DAB, *of de helft van het verſchil van twee tegengeſtelde rigtingen*, en kan dus, even zoowel als deze (§ 20), tot eene *maat der hoeken* gebruikt worden. Hieruit volgt van zelve, dat de ſom der twee aanliggende hoeken gelijk aan twee regte hoeken is, en dat, indien de eene hoek *ſcherp*, dat is kleiner dan een regte hoek is, de andere *ſtomp*, of grooter dan een regte hoek is. Indien de ſom van twee hoeken een regte hoek of twee regte hoeken is, dan wordt de eene hoek het *aanvulſel* van den anderen genoemd. Men pleegt hier het aanvulſel tot eenen regten hoek *complement* en het aanvulſel tot twee regte hoeken *supplement* te noemen; welke beide woorden uit eene vreemde (de latijnsche) taal ontleend zijn. Geen hoek, indien dezelve het *kleinſte* verſchil is van twee rigtingen, kan grooter dan twee regte hoeken zijn.

Aanmerking. Wij zeggen het *kleinſte verſchil*, omdat ſommige nieuwere Wiskundigen den hoek, aan een punt A gevormd door twee andere punten D en C, (fig. 2) *tweevoudig* ſtellen, *vooreerst* den hoek DAC klei-

kleiner zijnde dan twee regte hoeken, en ten *tweede* den hoek $D\ A\ C$, welke grooter is dan twee regte hoeken, en beſtaat uit de ſom der drie hoeken $D\ A\ G$, $G\ A\ B$ en $C\ A\ B$. Den eerstgemelden kleinſten hoek noemen zij den *concaven* hoek, den tweeden daarentegen den *convexen hoek*. Beide te zamen genomen bedragen vier regte hoeken. Indien dus de concave hoek is twee regte hoeken $— a$, dan is de convexe hoek twee regte hoeken $+ a$.

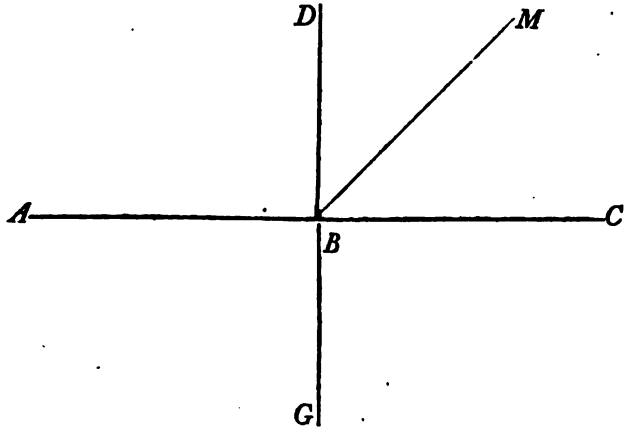
Het verſchil van twee tegengeſtelde rigtingen noemen ſommige duitſche Wiskundigen den *geſtrekten hoek*, welke twee regte hoeken is.

Euclides ſpreekt in zijne Meetkunde alleen van *concave* hoeken, die dus kleiner zijn dan twee regte hoeken. Wij bedoelen in deze verhandeling ook ſteeds door het woord den *hoek*, den *concaven* hoek, indien niet uitdrukkelijk het tegendeel geſteld wordt.

22.

PLAT VLAK EN CIRKELVLAK.

Fig 3.



Laat de lijn *D B* loodregt ſtaan op *A C*, en in de rigting van *B* naar *D* zonder perken zijn. Stel, dat dezelve, ſteeds dezen loodregten ſtand houdende, zich rondom de lijn *A C* beweegt, tot dat zij tot de vorige rigting *B D* terug gekeerd is, dan zal dezelve eene meetkundige grootheid beſchreven hebben, welke genoemd wordt een *plat vlak*, of ook eenvoudig, een *vlak*.

Elk bepaald gedeelte dezer lijn, zoo als *B D*, zal alsdan een gedeelte van dit vlak beſchreven hebben, welk gedeelte men een *cirkelvlak* of cirkel noemt. De meetkundige grootheid, welke het punt *D* bij de-

deze ronddraaijing beſchrijft, wordt *omtrek van den cirkel* of *cirkellijn* genoemd. Alle punten van dezen omtrek ſtaan op gelijken afſtand van het punt *B*, hetwelk daarom het *middelpunt des cirkels* genoemd wordt, enz.

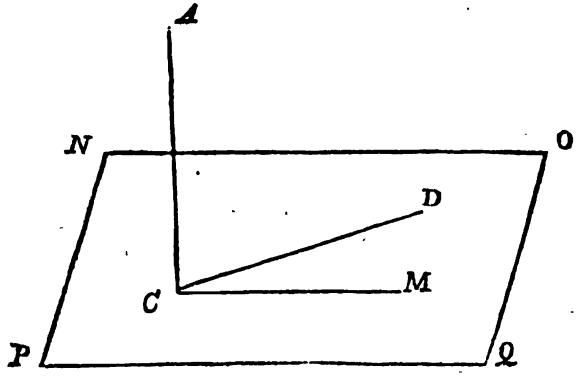
23.

GEVOLG.

1°. *In het vlak, door de onbeperkte lijn* B D *beſchreven, zijn, van* B *uitgaande, alle rigtingen, waarin die lijn, bij derzelver ronddraaijing, achtervolgens geweest is.*

2°. *Indien twee punten C en M van eene lijn C M in een vlak P Q N O zijn, dan is de geheele lijn, en derzelver verlengde, of de rigting der twee punten, in dat vlak.*

Fig. 4.



Stel

Stel dat de twee punten *C* en *M* zich in het vlak *N P S Q* bevinden, en trek uit *C* naar wilkeur in dat vlak eene lijn *C D*, dan kunnen wij volgens § 22 ſtellen, dat het vlak ontſtaan zij door de ronddraaijing van *C D* (onbeperkt genomen) rondom de loodlijn *A C*. Dewijl nu *M* in dit vlak gelegen is, moet *C D* bij die ronddraaijing dit punt ontmoeten, en dan is *C M* hoe verre ook verlengd een gedeelte van *C D* en dus eene regte lijn, gelegen in het vlak, waar de punten *C* en *M* zich bevinden.

Men kan hetzelfde ook aldus bewijzen. Laten *C* en *M* de punten zijn in het vlak *M O P Q* en in hetzelfde vlak een derde punt *D*, doch niet in dezelfde lijn met *C* en *M* gelegen. Er moet dus bewezen worden, dat de geheele lijn *C M* in dat vlak zij. Laat door de lijn *C M* een vlak gaan, en hetzelve om die lijn ronddraaijen, dan zal het bij die ronddraaijing het punt *D* ontmoeten. In dezen ſtaat zullen dus de drie punten *C*, *M* en *D* in de lijn *C M* in hetzelfde vlak zijn, maar dit is ook het eenige vlak, waarin zij te zamen kunnen zijn, want bij elke verandering van rigting komt *D* buiten het vlak. Dus kunnen in geen ander vlak, dan in *N O P Q* de 3 punten tegelijk zijn, maar in hetzelfde vlak is ook de lijn *C M* en derzelver verlenging.

Uit onze genetische bepaling van een vlak volgt dus

dus de theoretiſche, welke men daarvan gewoonlijk geeft.

Ook volgt hieruit onmiddelijk, *dat eene lijn ſlechts in een punt een vlak kan ſnijden.* Want indien dit in twee punten geſchiedde, zou de geheele lijn in dat vlak leggen.

3°. *Door twee punten C en D, of door eene regte lijn C D kunnen oneindig vele vlakken gaan.* Laat door de lijn *C D* een vlak gaan, dan kan dit vlak zelf rondom de lijn *C D* draaijen; doch het verandert ſteeds van rigting, dat is: het wordt ſteeds een ander vlak, terwijl de lijn *C D* in al deze vlakken is. Er kunnen dus oneindig vele vlakken door de twee punten *C* en *D*, of door de lijn *C D*, gaan. Maar, wanneer dit vlak een derde punt *M*, bij de ronddraaijing, ontmoet, zullen *drie punten, die niet in dezelfde regte lijn zijn, zich in het vlak bevinden.* Dit is daarenboven een enkel vlak; want door elke verandering van rigting komt het punt *M* buiten het vlak. Hieruit volgt:

4°. *Door drie punten, die niet in eene regte lijn liggen, kan altijd een vlak gaan, doch ook ſlechts een enkel vlak.*

5°. Hetzelfde geldt van twee lijnen die elkander ontmoeten of ſnijden. De twee lijnen van eenen hoek zijn dus altijd in een *bepaald* vlak. Immers gaat (fig. 2 bl. 68) door de drie punten *A B C* ſlechts een vlak,

vlak, waarin dus de lijnen CA, AB zijn, en dus ook derzelver verlengden AG en AD.

Hieruit volgt, *dat door 3 punten, die niet in eene lijn liggen, alsmede door twee lijnen, die elkander ontmoeten, een vlak bepaald wordt.*

6°. Twee vlakken kunnen elkander ſlechts in eene lijn ſnijden. Want, indien zij drie of meer punten die in eene en dezelfde lijn liggen, gemeenſchappelijk hadden, dan zoude er ſlechts een vlak zijn.

7°. De lijn AC (fig. 4 § 23. 2.) ſtaat loodregt op alle lijnen in het vlak $NOPQ$, welke door C kunnen getrokken worden. Zoodanig eene lijn wordt gezegd *op dat vlak loodregt te ſtaan.*

8°. Uit een punt C (fig. 4) van eene lijn CA kunnen op die lijn eene oneindige menigte van loodlijnen getrokken worden, welke loodlijnen alle in hetzelfde vlak $NOPQ$ liggen. Elk van deze loodlijnen ligt met CA in hetzelfde vlak (5), buiten hetwelk intusſchen al de overige loodlijnen liggen. Dus in *hetzelfde* vlak kan uit hetzelfde punt van eene lijn ſlechts *één* loodlijn op dezelve getrokken worden.

9°. Indien een aantal lijnen, welke in hetzelfde vlak zijn, elkander in een gemeenſchappelijk punt ſnijden, dan zal de ſom der hoeken, welke zij met elkander maken vier regte hoeken bedragen, hetwelk echter niet zal plaats hebben, indien die lijnen niet in hetzelfde vlak zijn. Men heeft hier door een kenteeken, waardoor men kan zien, of verſchillende

lij-

lijnen, die elkander in hetzelfde punt snijden, in hetzelfde vlak al dan niet gelegen zijn.

10°. Indien drie lijnen AB, BC en MB (fig. 3) *in hetzelfde vlak* zijn, en de som der hoeken MBA en MBC twee regte hoeken bedraagt, dan zal BC het verlengde zijn van AB, maar dit zal niet altijd plaats hebben, indien MB buiten het vlak van AB en BC ligt.

11°. Men moet dus wel onderscheiden, of drie en meerdere lijnen die elkander ontmoeten, of snijden, zich in hetzelfde vlak of in verschillende vlakken bevinden. Dewijl intusschen twee lijnen, die elkander snijden of ontmoeten, altijd in hetzelfde vlak zijn, zijn dus de stellingen tot deze betrekkelijk *onvoorwaardelijk* waar, zoo als, dat de som der vier hoeken door dezelve gevormd aan vier regte hoeken gelijk is, en dat de tegenoverstaande hoeken gelijk zijn, en de twee aanliggende hoeken te zamen twee regte hoeken bedragen.

24.

REGTLIJNIGE PLATTE FIGUREN.

Het vlak bevat alle rigtingen, welke tusschen elk paar punten, in het vlak gelegen, kunnen zijn; welke rigtingen door onbeperkte lijnen moeten voorgesteld worden; waaruit volgt, dat het vlak

eene

eene onbeperkte grootte moet hebben(§ 22); het wordt daarom ook gezegd *oneindig groot te zijn.* Doch men kan daarvan een gedeelte nemen, dat eene bepaalde grootte heeft, zoo als, bij voorbeeld, een *cirkelvlak*, en dit noemt men een *plat figuur.* Zulks geſchiedt vooral, wanneer men van het vlak, meer dan twee punten, waarvan er geene *drie* in eene en dezelfde regte lijn liggen, op eene bepaalde wijze, door regte lijnen vereenigd. Vereenigt men al dus 3, 4, 5, 6 . . . . punten, zoo ontſtaan hieruit *regtlijnige platte figuren*, welke men noemt *drie- vier- vijf hoeken*, en in het algemeen *veelhoeken*, omdat dezelve even zoo vele hoeken hebben, als lijnen, binnen welke zij beſloten zijn, enz. Deze lijnen worden de zijden der figuur genoemd; weshalve ook de figuren *driezijdige*, *vierzijdige* . . . *veelzijdige* genoemd worden. De openingen der hoeken kunnen ten opzigte van den veelhoek *naar binnen* of *naar buiten* gekeerd zijn. In het eerſte geval worden dezelve *uitſpringende* hoeken, in het tweede *inſpringende* hoeken genoemd. In de Meetkunde onderzoekt men bijna uitſluitend de veelhoeken, waarvan al de hoeken *uitſpringende* zijn.

Wanneer echter de punten, welke men door regte lijnen vereenigt, in verſchillende vlakken zijn, ontſtaan er figuren, *welke niet plat zijn*, en geheel andere hoedanigheden hebben, dan de platte figuren van hetzelfde getal zijden. De lijnen, welke de hoekpun-

punten eener figuur vereenigen, worden, indien zij niet de zijden der figuur zijn, *diagonalen* genoemd.

25.

KENTEEKEN EENER PLATTE FIGUUR.

Uit § 23 kunnen wij opmaken de kenteekens, waardoor zich eene platte figuur van eene niet platte onderscheidt.

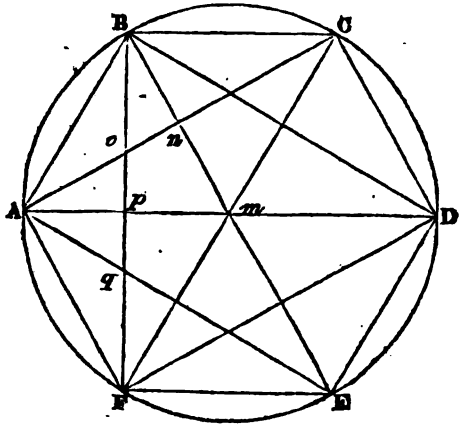
1°. *Elke regtlijnige driehoek is eene platte figuur, en door eenen regtlijnigen driehoek is een vlak bepaald.*

2°. *Indien de diagonalen A C, B M (fig. 5) van eenen vierhoek B C M A elkander snijden, dan is dezelve eene platte figuur. Indien ze elkander niet snijden, dan is de vierhoek in twee vlakken gelegen, welke elkander in eene van die diagonalen snijden.*

3°. In het algemeen, *indien in eene veelzijdige regtlijnige figuur al de diagonolen, welke uit een der hoekpunten A naar de andere hoekpunten getrokken zijn, door eene andere diagonaal gesneden worden, dan is de figuur eene platte figuur.* Dus is (fig. 5) *A B C D E F* eene platte figuur, omdat al de diagonalen *A C, A D, A E, A F* uit *A* getrokken door

door de diagonaal $B\,F$ in de punten o, p, q geſneden worden. *Indien deze ſnijding niet plaats heeft, dan ligt de figuur in meer dan een vlak.*

Fig. 5.



26.

GROOTTE EN FORM VAN PLATTE FIGUREN.

De zijden en de diagonalen van eene platte figuur zijn de lijnen, welke de hoekpunten vereenigen. Van derzelver lengte hangt af de *grootte*, en van derzelver rigting de *form* der figuur. Deze rigtingen zijn bepaald door de hoeken, welke zij met elkander maken. Twee platte figuren van een gelijk getal zijden, zijn dus gelijkvormig, *indien de gelijkſtandige hoeken, welke door de zijden en door*

de diagonalen gevormd worden, in beide figuren gelijk zijn. Uit de gelijkheid dezer hoeken volgt de evenredigheid der gelijkſtandige zijden en diagonalen, *zoodat gelijkvormige figuren ook evenredige zijden en diagonalen hebben.*

In eene platte figuur van n zijden kunnen $\frac{n.\ n-3}{2}$ diagonalen naar de hoekpunten getrokken worden, en uit elken hoek $n-3$ diagonalen, waardoor de veelhoek in $n-2$ driehoeken verdeeld wordt, en waaruit volgt, dat de ſom der hoeken, door de zijden der figuur gevormd, $2n-4$ regte hoeken bedraagt.

Door de *lengte der zijden en der diagonalen* wordt de *grootte der figuur* bepaald. Intusſchen daar elke figuur in $n-2$ driehoeken verdeeld wordt, wier zijden de diagonalen en zijden der figuur zijn, en elke driehoek door drie zijden volkomen bepaald is, volgt ook uit de lengte der zijden en der diagonalen de form der figuur.

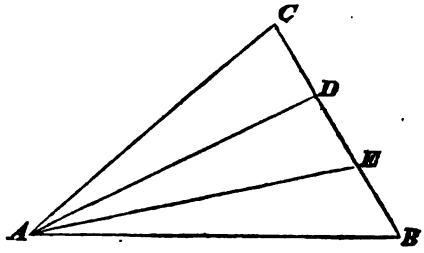
Twee platte regtlijnige figuren, van een gelijk getal zijden, zijn dus *volkomen*, dat is in form en grootte, *gelijk, indien zij de overeenkomſtige zijden en diagonalen gelijk hebben.*

Na deze conſtructie van een plat vlak, en aanwijzing van deszelfs deelen, kunnen wij het onderzoek der hoeken voortzetten.

27.

DEELBAARHEID DER HOEKEN.

Fig. 6.



Men neme in de lijnen *A C* en *A B*, welke eenen hoek vormen, twee punten *C* en *B*, en vereenige dezelven door eene regte lijn, waardoor alsdan een *driehoek A B C* ontſtaat. Uit het hoek punt *A* kan een onbepaald getal lijnen naar *C B* getrokken worden, waardoor de hoek *C A B* in even zoo vele deelen verdeeld wordt, als de lijn *C B*. Is dus *C D* eene differentiaal-lijn, dan is de hoek *C A D* een differentiaal-hoek; waaruit volgt, dat een hoek, even zoowel als eene regte lijn, *een continuum* is, en dus ook uit differentiaalhoeken (§ 14) beſtaat.

28.

VERDEELING VAN DEN REGTEN HOEK.

Een hoek wordt gemeten door eenen regten hoek of door deszelfs deelen. De oude wijze van verdeeling

van eenen regten hoek beſtaat hierin, dat men denzelven in 90 deelen verdeelt, welke men *graden* noemt, en alsdan met de deeling door 60 voortgaat. Elke graad heeft 60 *minuten*, elke minuut 60 *ſeconden*, elke ſeconde 60 *tertien*. Deze graden, minuten, ſeconden en tertien worden aangewezen door de teekens o, ', '', '''. Zoo is bij voorbeeld een zevende gedeelte van eenen regten hoek gelijk aan 12° 51' 25'' 42''' 85....

Eenvoudiger is de nieuwere verdeeling van eenen regten hoek, namelijk in 100 graden, en in tientallige breuken, en dus geheel volgens het tientallig ſtelſel. Volgens deze verdeeling is het zevende gedeelte van eenen regten hoek 14°, 28571428.... Men zet hier ook wel voort de verdeeling door 100, zijnde eene minuut het honderdſte gedeelte van eenen graad, eene ſeconde het honderdſte gedeelte van eene minuut enz., zoodat men dit zevende gedeelte ook aldus ſchrijft 14° 28', 57'' 14''', 28...

29.

GELIJKHEID VAN HOEKEN EN VAN FIGUREN UIT HOOFDE VAN DERZELVER OVEREENKOMST.

Het beginſel of axioma van overeenkomst, hetwelk wij bl. 65. 4 bij de vergelijking van twee regte lijnen gebruikt hebben, gebruiken wij ook bij de vergelijking van twee hoeken en figuren.

Om

Om bij voorbeeld te onderzoeken of de hoek *AFE* (fig. 5) gelijk zij aan den hoek *ABC* ſtelt men zich voor, dat de hoek *AFE* zoodanig op den hoek *ABC* geplaatst zij, dat het toppunt *F* op het toppunt *B* en *FA* langs *BA* valt, dan zullen die hoeken gelijk zijn, indien tevens *FE* langs *BC* valt.

Het axioma van overeenkomst hier gebruikt, heeft dus deze beteekenis. *Twee hoeken zijn gelijk, wanneer men dezelve zoodanig in zijne voorſtelling kan plaatſen, dat derzelver toppunten en beenen op elkander vallen, en omgekeerd, indien die hoeken gelijk zijn, kan men dezelve zoodanig plaatſen.*

Het axioma van overeenkomst toegepast op de regtlijnige figuren heeft deze beteekenis. *Wanneer men twee regtlijnige platte figuren van een gelijk getal zijden zoodanig in zijne voorſtelling kan plaatſen, dat al de zijden van de eene figuur op die der andere figuur vallen, dan zijn deze figuren volkomen of in alle opzigte gelijk*, dat is, niet alleen de inhouden dezer figuren (het gedeelte van het vlak of van vlakken, dat zij innemen) zijn gelijk, maar ook derzelver gelijkſtandige zijden en diagonalen, en de hoeken door dezelve gevormd.

Dit bijvoegſel is noodig, omdat men ook zegt, dat twee figuren *gelijk* zijn, *wanneer ſlechts derzelver inhouden gelijk zijn*, in welk geval de zijden en hoeken zeer ongelijk kunnen wezen, ja ook het getal der zijden en hoeken kan ongelijk zijn; de eene figuur kan

kan eene regtlijnige, eene platte figuur zijn, en de andere zulks niet zijn.

Van deze *axiomata der overeenkomst* maakt men gebruik, om de vier gevallen te bepalen, waarin twee driehoeken volkomen aan elkander gelijk zijn. Men toont onmiddelijk door dezelve aan, dat dit plaats heeft, *indien twee zijden met den ingeſloten hoek in beide gelijk zijn*, voorts, met hulp der ſtelling, *twee regte lijnen kunnen elkander ſlechts in een punt ſnijden* (bl. 63), dat zulks ook plaats heeft, *indien eene zijde met de twee aanliggende hoeken gelijk zijn*. Uit het eerſte volgt, dat, *indien van eenen driehoek twee zijden gelijk zijn, ook de tegenoverſtaande hoeken gelijk zijn*, waaruit dan de twee andere gevallen afgeleid worden, dat deze volkomene gelijkheid van twee driehoeken ook plaats heeft, *indien zij gelijke zijden hebben*, alsmede, *indien zij twee zijden gelijk hebben met eenen niet ingeſloten hoek, en van dezelfde ſoort zijn*, dat is indien beide of regthoekig, of ſcherphoekig of ſtomphoekig zijn. Hieruit volgt dan, dat men eenen driehoek in drie gevallen meetkundig kan teekenen of conſtrueren, indien of drie zijden, of eene zijde met twee aanliggende hoeken, of twee zijden met eenen hoek gegeven zijn. Men ziet dus hieruit, in welke gevallen een driehoek volkomen bepaald is, en wat in eenen driehoek bekend moet zijn, om daaruit het onbekende te vinden.

Bij den voortgang tot andere ſtellingen is de theorie

der

der evenwijdige lijnen noodig, waartoe wij thans overgaan.

30.

VERDWIJNING DER HOEKEN.

Het verſchil der rigting van twee lijnen, die in hetzelfde vlak zijn, is voor vermindering vatbaar, en kan verdwijnen. Deze verdwijning heeft plaats in twee gevallen.

1°. *Wanneer de twee lijnen zoo als B A en B C,* (fig. 7) *een punt (B) van ontmoeting hebben, en dus de eene lijn op de andere valt.*

Laat *B A* rondom het punt *B* draaijen, zoodat het punt *A* meer en meer nadert tot de lijn *B C*, dan wordt ook de hoek *A B C* beſtendig kleiner, en verdwijnt eindelijk, wanneer *A* op *B C* valt. Maar bij deze zamenkomst blijven er niet twee lijnen afgezonderd van elkander, en twee paar rigtingen, *maar er is ſlechts eene lijn, en dus een paar rigtingen.*

Wanneer de lijnen, in hetzelfde vlak zijnde, niet op elkander vallen, maar *hare rigtingen van de rigting eener derde lijn, die haar ſnijdt, evenveel aan denzelfden kant afwijkt.* Alsdan moeten zij *gelijke* rigtingen hebben. Zoo hebben b. v. *B C* en *D E* in hetzelfde vlak zijnde gelijke rigtingen, indien de rigting van *D* naar *A* evenveel afwijkt van de rigting van *B* naar *C* als van de rigting van *D* naar *E*, dat

dat is, indien de hoeken m en m' en dus ook p en p' aan elkander gelijk zijn.

Men ſtel, dat de lijnen AF en GE, beide onbepaald van lengte, elkander in het punt D ſnijden. Laat AF draaijen rondom het punt B, zoodanig dat zij altijd blijft in het vlak $AFGE$, dan zal het ſnijpunt zich gedurig verder van D verwijderen, de hoek GDF, het verſchil van rigting zal beſtendig kleiner worden, tot dat AF eindelijk niet meer de lijn GE ontmoet, in welk geval er geen verſchil van rigting meer is, en AF wordt HC. Alsdan hebben dus HC en GE gelijke rigting.

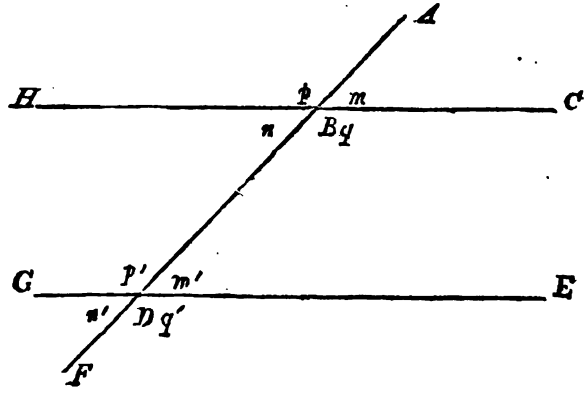
Omgekeerd, indien de lijnen BC en DE gelijke rigtingen hebben, moeten zij ook evenveel van de rigting eener derde, haar ſnijdende, lijn naar denzelfden kant verſchillen, dat is, de hoeken m en m', en de hoeken p en p' moeten aan elkander gelijk zijn. Deze hoeken m, m' en p, p', alsmede n, n', en q, q', welke dus aan denzelfden kant der ſnijdende lijn zijn, en wier openingen naar dezelfde zijde gerigt zijn, worden *overeenkomſtige* hoeken genoemd. Het tegendeel heeft plaats bij de hoeken n, m'; q, p'; m, n'; p, q', welke *verwisſelende* hoeken genoemd worden, waarvan de twee eerſte paren *inwendig-* en de twee laatſte paren *uitwendig verwisſelende* hoeken genoemd worden.

31.

EVENWIJDIGE LIJNEN.

Twee lijnen, welke gelijke rigtingen aanwijzen, worden evenwijdige lijnen genoemd.

Fig. 7.



32.

GEVOLG.

Uit deze bepaling en uit § 30 volgt onmiddellijk:

1°. *Twee evenwijdige lijnen H C en G E maken met eene derde lijn A F, die dezelve in B en D snijdt, gelijke overeenkomstige hoeken.* Dus $m = m'$; $p = p'$; $q = q'$; $n = n'$.

Dewijl daarenboven $m = n$, $m' = n'$, $p = q$ en $p' = q'$, volgt, dat, indien *een* van deze 8 hier gevormde hoeken regt is, ook de overige 7 hoeken regt zullen zijn.

Eene lijn dus, die op eene lijn loodregt ſtaat, zal ook loodregt ſtaan op al de lijnen, welke in het vlak dezer twee lijnen, evenwijdig aan die lijn, kunnen getrokken worden.

Omgekeerd, *indien eene lijn op twee en meer lijnen, die met haar in hetzelfde vlak zijn, loodregt ſtaat, dan zijn die lijnen evenwijdig.*

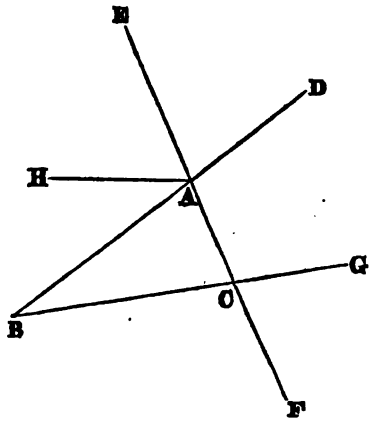
De bijvoeging, *die met haar in hetzelfde vlak zijn*, is noodzakelijk, uit hoofde van hetgene in § 23 gezegd is.

Indien daarentegen een der 8 hoeken niet regt is, zullen er vier ſcherpe en vier ſtompe hoeken zijn, zoodanig dat de vier ſcherpe hoeken, zoo als ook de vier ſtompe hoeken, aan elkander gelijk zijn, en dat de ſom van eenen ſcherpen en van eenen ſtompen hoek twee regte hoeken bedraagt.

Indien wij deze hoeken naar derzelver namen noemen, dan volgt uit de algemeene ſtelling deze:

Indien twee evenwijdige lijnen door eene derde lijn geſneden worden, dan zijn de overeenkomstige, alsmede de verwisſelende hoeken even groot, en de ſom der twee inwendige hoeken, alsmede de ſom der twee uitwendige hoeken, aan denzelfden kant der ſnijdende lijn, is gelijk aan twee regte hoeken.

Fig. 8.



2. Omgekeerd, *indien een van deze gelijkheden plaats heeft, en de lijnen in hetzelfde vlak zijn, dan zijn die lijnen evenwijdig.*

3. *Indien intusschen een van deze gelijkheden niet plaats heeft, dan zijn de lijnen A D en C G (fig. 8). niet evenwijdig, maar zij zullen in hetzelfde vlak zijnde, eenen hoek B maken, welke gelijk is aan het verschil der overeenkomstige hoeken, dat is, het verschil der hoeken E A B en E C B is gelijk aan den hoek B.*

Trek namelijk *A H* evenwijdig aan *B G* dan is *L E A H = L E C B, L H A B = L B = L E A B — L E C B.*

4. *Indien de lijnen, in hetzelfde vlak zijnde, niet evenwijdig zijn, zal geene van deze gelijkheden plaats hebben.*

5. *L E A B = L B + L E C B, of de uitwendige hoek van eenen driehoek is gelijk aan de beide tegenoverſtaande inwendige hoeken, en is dus grooter dan een van dezelven.*

6. *L E A B + L B A C = 180° = L B + L E C B + L B A C*, of *de ſom der drie hoeken van eenen driehoek is twee regte hoeken.*

Uit de twee laatſte ſtellingen worden de ſtellingen 18. 10. 20. 21. 24. 25. 33. 34. voorkomende in het eerſte boek van EUCLIDES, en meer andere gemakkelijk afgeleid (*a*).

7. *Evenwijdige lijnen ontmoeten elkander nooit.* Indien zij elkander ontmoeten, dan zouden zij eenen hoek met elkander maken, en dus een verſchil van rigting hebben; hetwelk ſtrijdig is met de natuur der evenwijdige lijnen.

8. *Wanneer lijnen, die in hetzelfde vlak zijn, elkander niet ontmoeten, dan zijn dezelve evenwijdig.*

Aanmerking. Wij veronderſtellen, bij deze leer der

(*a*) Zoo als de ſtellingen voorkomende in *de beginſelen der Meetkunde van* SMITH, *gevolgd naar het Fransch van* LACROIX. § 17. 18. 24. 26. 32. 43. 65. 66. 67. en van de Parallelogrammen § 94. 95. 96 en meer andere.

der evenwijdige lijnen, altijd *zoodanige lijnen, die onbepaald ter wederzijde verlengd zijn.* Want bij deze theorie komt niet de lengte der lijnen, maar de rigting in aanmerking, welke altijd door lijnen zonder perken verzinnelijkt wordt.

9. *Indien de beenen van eenen hoek evenwijdig zijn aan de beenen van eenen anderen hoek, en de openingen naar denzelfden kant ſtaan, dan zijn die hoeken gelijk. Dit geldt ook, wanneer de hoeken in verſchillende vlakken zijn.*

10. *Door twee evenwijdige lijnen is een vlak bepaald.*

11. *Twee rigtingen in hetzelfde vlak kunnen ook tegengeſteld zijn, al zijn zij niet door dezelfde regte lijn aangewezen.* Indien de rigting van *B* naar *C* (fig. 7) gelijk is aan de rigting van *D* naar *E*, dan is zij tegengeſteld aan de rigting van *E* naar *G*.

12. *Eene regte lijn, welke bij eene beweging altijd evenwijdig aan zich zelve blijft, behoudt eene gelijke rigting;* en omgekeerd, *eene lijn, welke bij eene beweging altijd eene gelijke rigting houdt, blijft evenwijdig aan zich zelve.* Een voorbeeld hiervan geeft ons de as der aarde, bij hare beweging rondom de zon.

13. Laat de lijn *H C* (fig. 7) door *A F* geſneden worden, en evenwijdig aan zich zelve door het geheele vlak, bepaald door deze twee lijnen (§. 23, 5), bewogen worden, dan zal *A F* dezelve altijd blijven ſnijden. Er zijn dus in dit vlak geene aan haar evenwijdige lijnen, welke *H C* niet

bij

bij deze beweging zoude beſchreven hebben, en welke niet door *A F* zouden geſneden zijn. De lijn *A F* ſnijdt dus alle lijnen, welke in het vlak *H C F* evenwijdig aan deze lijn *C H* kunnen getrokken worden. Hieruit volgt dus:

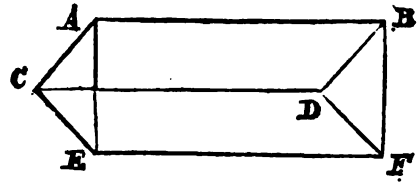
Indien twee lijnen elkander ſnijden, zal elk derzelve alle lijnen ſnijden, welke met de andere evenwijdig zijn, en zich in het vlak dezer ſnijdende lijnen bevinden, zoodat hierdoor het vlak in parallelogrammen verdeeld wordt.

14°. *De middellijnen van eenen cirkel toonen alle rigtingen aan, welke in het vlak, waarin zich de cirkel bevindt, kunnen plaats hebben.* Er is dus geene rigting in dat vlak mogelijk, welke niet gelijk zoude zijn aan eene rigting, door eene van deze middellijnen aangewezen.

15°. *Twee lijnen, welke aan eene derde evenwijdig zijn, zijn aan elkander evenwijdig, hetzij dat deze drie lijnen in hetzelfde vlak, of niet in hetzelfde vlak zijn.*

Hieruit blijkt dus, dat, wanneer eene lijn evenwijdig is aan andere lijnen, hoe groot ook derzelver getal zijn moge, en al zijn dezelve in zoo vele verſchillende vlakken, als er lijnen zijn, elk eene aan elk eene der overigen evenwijdig, en dus met dezelve in hetzelfde vlak zal wezen.

Fig. 9.



Indien bij voorbeeld CD evenwijdig is aan AB en EF, kan dezelve buiten het vlak $AB\ EF$ zijn, waarin zich AB en EF bevinden, zoodat er dus drie verſchillende vlakken zijn, $ABCD$, $CDEF$ en $ABEF$.

Wij zouden hierbij nog andere gevolgen, uit onze bepaling afgeleid, kunnen voegen. Het aangehaalde is intusſchen toereikende, om te doen zien, *dat het geheele leerſtelſel der evenwijdige lijnen, bijna als een onmiddellijk gevolg uit de bepaling, door ons van de evenwijdige lijnen gegeven, kan beſchouwd worden.*

Dezelfde bepaling maakt ook de beſchouwing der evenwijdige vlakken hoogst eenvoudig, zoo als wij nader zullen zien.

Aanmerking. Het zal niet noodig zijn, hier in een onderzoek te treden van de verſchillende bepalingen, welke men van evenwijdige lijnen gegeven heeft, en van de bijzondere wegen, welke men heeft ingeſlagen, om de daartoe betrekkelijke ſtellingen te bewijzen. G. s. KLÜGEL heeft, gelijk hij ook in zijn

Ma-

Mathematisch Wörterbuch berigt (*o*), in het jaar 1763, in eene Akademiſche diſſertatie, 28 meer of minder verſcheidene bewijsſoorten, ten opzigte van de evenwijdige lijnen, aangehaald en beoordeeld; en het is bekend, dat dit getal ſedert dien tijd nog vermeerderd is. KLÜGEL (*p*) oppert eene zwarigheid tegen de bepaling: *Regte lijnen zijn evenwijdig, welke van eene derde, onder denzelfden hoek naar dezelfde zijde heen, geſneden worden*, hierin beſtaande, dat bewezen moest worden, hetgeen niet bewezen is, *dat regte lijnen, welke door eene andere, onder gelijke hoeken, naar dezelfde ſtreek heen geſneden worden, ook van elke andere lijn, op zoodanige wijze geſneden worden.* De meening van KLÜGEL is dus, dat er moet bewezen worden, *dat, indien bij de eene ſnijdende lijn de overeenkomſtige hoeken gelijk zijn, zulks ook het geval moet zijn bij eene andere ſnijdende lijn.* Deze zwarigheid verdwijnt geheel door onze bepaling, *volgens welke evenwijdige lijnen gelijke rigtingen aanwijzen*, dus rigtingen, die evenveel afwijken van de rigtingen eener derde lijn, door welke zij geſneden worden; onverſchillig welke deze derde lijn zijn moge, of waar de ſnijding plaats hebbe.

33

(*o*) III Deel, bij het woord *parallelen*, bl. 728.

(*p*) Op de aangehaalde plaats, bl. 737.

33.

GEBROKENE LIJNEN.

Fig. 10.

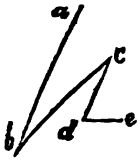


Fig. 11.

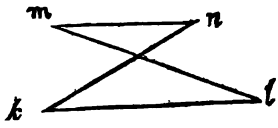
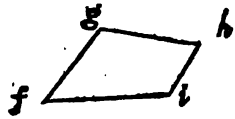


Fig. 12.



Eene gebrokene lijn, zoo als *a b c d e*, *k l m n k*, *f g h i f*, (fig. 10, 11, 12) *is eene zamenstelling van regte lijnen, waarvan elke volgende eene andere rigting heeft, dan de voorgaande.* Indien de uiteinden met elkander vereenigd, en al de deelen in hetzelfde vlak zijn, en elkander niet snijden, dan omsluit zij *eene regtlijnige platte figuur*, gelijk *f g h i f* (fig. 12), en wordt derzelver *omtrek* genoemd. In dit geval verandert zij zoo dikwijls van rigting, en vormt dus zoovele hoeken, als het getal van derzelver deelen of lijnen is. Deze deelen worden alsdan *zijden van de figuur* genoemd. Indien de uiteinden der lijn niet met elkander vereenigd zijn, dan verandert zij zoo dikwijls van rigting, en vormt dus zoovele hoeken als het getal van hare deelen is, min één.

De lijn, welke van het eene hoekpunt naar het andere is getrokken, en niet een deel der gebrokene lijn is, wordt (even zoo als bij eenen veelhoek (§ 26), *diagonaal genoemd.*

tusſchen dezelve des te kleiner is, hoe kleiner de boog is.

Hieruit volgt:

De regte lijn tusſchen twee punten is de kortſte weg, om van het eene dezer punten tot het andere te komen. Dit is de bepaling, welke LA CROIX en meer anderen van de regte lijn gegeven hebben; doch zij toont eene eigenſchap aan, die geenszins het wezen der regte lijn uitmaakt. Het is eene uit de natuur der regte lijn *afgeleide* eigenſchap, die dus een bewijs noodig heeft. Daarom is het ook niet goed te keuren, wanneer de ſtelling, welke dezelve aanwijst, onder de axiomata geplaatst wordt.

Overigens is de uitdrukking: *Eene regte lijn is de kortſte afſtand tusſchen twee punten*, onnaauwkeurig, want er is ſlechts *een* afſtand tusſchen twee punten.

37.

RAAKLIJNEN EN NORMAALLIJNEN VAN EENE KROMME LIJN.

Wanneer de differentiaallijnen eener kromme lijn verlengd worden, noemt men dezelve *Raaklijnen of Tangenten der kromme lijn. Eene Raaklijn van een bepaald punt der kromme lijn is dus derzelver verlengde differentiaallijn voor dat punt, en toont dus de rigting aan der kromme lijn in dat punt. Normaal-*

lij-

lijnen zijn diegenen, welke op de differentiaallijnen loodregt getrokken zijn. Normaallijn van een punt der kromme lijn is dus de lijn, welke in dat punt loodregt ſtaat op de raaklijn.

38.

LENGTE EENER KROMME LIJN.

Lengte is de afſtand tuſſchen twee punten, en kan dus alleen door eene regte lijn aangewezen worden. Wanneer men intuſſchen ſpreekt van *de lengte eener kromme lijn*, verſtaat men hierdoor den afſtand van twee punten, tuſſchen welke zij zou gelegen zijn, indien zij tot eene regte lijn was uitgeſpannen, of indien al hare differentialen in dezelfde regte lijn (zoo als in de tangens van een der punten) geplaatst waren, zoo als bij voorbeeld zulks geſchiedt bij de rondraaijende beweging van een rad over den horizontalen bodem. De lengte der kromme lijn kan gevonden worden door de beſchouwing van eene gebrokene lijn, waarvan de zamenſtellende deelen gelijk zijn, en chorden zijn van de kromme lijn. Hoe grooter het getal dezer chorden is, des te meer nadert de lengte der kromme lijn tot die der gebrokene lijn. Gemakkelijker en naauwkeuriger wordt deze lengte bepaald, wanneer uit de vergelijking tuſſchen de differentialen der kromme lijn en der coördinaten, de vergelijking tuſſchen den boog zelven en de coördi-

dinaten wordt gevonden, zoo als dit geſchiedt in de Integraalrekening (zie bladz. 107).

39.

BEPALING VAN DE FORM EENER KROMME LIJN.

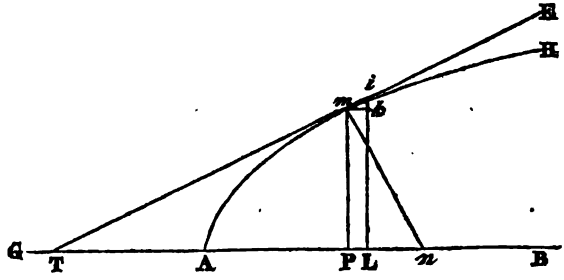
Gelijk de form van eenen veelhoek afhangt van de rigting der hoekpunten, en dus van de rigting der zijden en diagonalen, *zoo hangt ook de form eener kromme lijn af van de rigting der differentialen of raaklijnen.* Het is de form alleen, waardoor zich de oneindig vele ſoorten van kromme lijnen van elkander onderſcheiden. Een *cirkel* b. v. onderſcheidt zich van eenen anderen cirkel alleen door de grootte en niet door de form. Hij onderſcheidt zich van de ellips wezenlijk door de form, terwijl beide in grootte kunnen gelijk zijn.

Maar gelijk wij ter bepaling der grootte van lijnen, figuren, en ligchamen, eene ſtandvastige grootheid of *eenheid* noodig hebben met welke wij dezelve vergelijken of meten, *hebben wij ook, om de rigting der raaklijnen te bepalen, eene andere ſtandvastige rigting noodig, met welke wij dezelve vergelijken kunnen.* Dus zal de hoek, welken de raaklijn van een punt der kromme lijn met eene lijn van eene ſtandvastige rigting maakt, de rigting der raaklijn voor elk punt bepalen.

Dit is de rede, waarom men bij het onderzoek van

van de form eener kromme lijn, eene ſtandvastige lijn gebruikt, en den hoek bepaalt, welken de raaklijnen van elk punt met die lijn maken. Deze lijn wordt *de as der kromme lijn* genoemd, en kan naar willekeur getrokken worden. Loodlijnen (ook wel evenwijdige ſchuinſche lijnen), uit de punten der kromme lijn op de as neergelaten, noemt men *ordinaten van die punten*. *Abscisſen* zijn deelen der as, gerekend van een punt der as, willekeurig genomen, hetgene men het *beginpunt der abscisſen* noemt. *Abscis van een punt der kromme lijn is een gedeelte der as, tuſſchen dat beginpunt en den voet der ordinaat, gelegen.* Wij beſchouwen in deze afdeeling die kromme lijn, welke in een en hetzelfde vlak is gelegen.

Fig. 14.



Laat *A m H de kromme lijn* zijn, *G B de as*, *A het beginpunt der abscisſen*, *T m* de *raaklijn*, *m n* de *normaal* loodregt op de raaklijn. Trek *m P* loodregt op de as, dan is *m P* de loodregte *ordinate*, en *A P* de *abscisſe* voor het punt *m*. Men noemt

TP de *ſubtangens* (onder raaklijn) en Pn de *ſubnormaal* (ondernormaal) van het punt m, omdat zij onder de raaklijn en de normaal liggen. Men toont gewoonlijk de ordinaat aan door de letter y, en de abscis door x, en noemt beiden, de *coördinaten* van het punt m. Indien de ordinaten op de as loodregt ſtaan, dan worden zij *loodregte coördinaten* genoemd.

Indien er nu eene vergelijking beſtaat tuſſchen de coördinaten der punten der kromme lijnen, welke vergelijking voor alle punten dezelfde moet zijn, dan is de kromme lijn eene *wiskundige lijn*, omdat alsdan de Wiskunde derzelver form uit die vergelijking kan bepalen. Laat mi de differentiaal der kromme lijn in het punt m zijn, trek iL loodregt op de as, en mk loodregt op de ordinaat mP, dan is ik de differentiaal der ordinaat (δy) en $mk = PL$ de differentiaal der abscis (δx). Voorts is de driehoek mik regtlijnig en $Limk = LmTP$, omdat km evenwijdig is aan de as,

dus $\frac{ik}{mk} = \frac{\delta y}{\delta x} = \text{tang. } T = \frac{Pm}{TP} = \frac{y}{\text{ſubtangens}}$

$= \frac{Pn}{Pm} = \frac{\text{ſubnormaal}}{y}$

dus is de *Subtangens* $= \frac{y\delta x}{\delta y} = y \text{ cotang } T$

de *Subnormaal* $= \frac{y\delta y}{\delta x} = y \text{ tang. } T$

nor-

de normaal $= mn = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{\left(y_2 + y_2 \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$

$= y \sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)} = \frac{P\,m}{cos\,T} = \frac{y}{cos\,T.}$

Tangens $= mT = \sqrt{(P\,m^2 + T\,P^2)}$

$y \sqrt{\left(1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}\right)} = y\ fin.\ T.$

Voorts is $m\,i = \sqrt{(m\,k^2 + i\,k^2)}$. Indien dus de boog door z wordt aangetoond, dan is

$\delta z = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$.

Aanmerking. 1. Men moet wel onderſcheiden, *tangens van een punt der kromme lijn, en tangens van eenen boog of hoek.* Gebruikt men dus voor beiden het woord *tangens*, dan is het ter onderſcheiding noodig, de laatſte *tangens van eenen hoek of boog te noemen.* Sommigen gebruiken het hollandſche woord *raaklijn*, om de tangens van een punt der kromme lijn, en het latijnſche woord *tangens*, om de tangens van eenen hoek of boog aan te wijzen. Volgens deze benaming is de tangens van den hoek, welken de raaklijn van een punt met de as maakt $= \frac{\delta y}{\delta x}$; en van den hoek, welken de *normaal* met de as maakt, $= \frac{\delta x}{\delta y}$.

Aanmerking. 2. Volgens den regel bl. 59 aangewezen, vindt men door de vergelijking der coördinaten eener kromme lijn, de vergelijking der differentialen dezer coördinaten, en dus ook de waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$ = Tang. T, en hierdoor dus de *Tangens*, *Subtangens*, *Normaal* en *Subnormaal* voor elk bepaald punt der kromme lijn. Hier worden, gelijk uit de figuur blijkt, de differentialen der coördinaten beſchouwd als oneindige kleine veranderingen van dezelve, dat is als veranderingen, welke kleiner zijn dan elke te bepalen grootheid. Hetzelfde geldt van elke veranderlijke grootheid, want derzelver differentiaal is hare oneindig kleine verandering. Zoo b. v. indien de boog $A\,m$ is z, dan is $m\,i = d\,z$, of de oneindig kleine verandering van denzelven, en dewijl $m\,i : m\,k = 1 :$ *cos.* $T = \partial z : \partial x$
en $m\,i : i\,k = 1 :$ *ſin.* $T = \partial z : \partial y$
is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{cos.T}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{ſin.\,T}$.

Aanmerking. 3. Gewoonlijk worden in elke vergelijking, gelijk bekend is, de bekende grootheden door de eerſte, en de onbekende grootheden door de laatſte letters van het Alphabet aangewezen. Om de onbekenden te vinden, moeten er zoo vele wezenlijk verſchillende vergelijkingen zijn, als er onbekende grootheden zijn. Wanneer dat getal van vergelijkingen kleiner is, dan het getal der onbekende grootheden,

kan

kan men wel niet de onbekenden berekenen, maar derzelver betrekkingen tot elkander wordt door die vergelijkingen aangewezen, terwijl men ook uit dezelve de betrekking van hare veranderingen, en dus ook van derzelver differentialen kan bepalen.

In dit geval worden de onbekende grootheden in de vergelijking *veranderlijke*, en de bekende grootheden *ſtandvastige* genoemd. De ſtandvastige grootheden hebben dus geene veranderingen en dus ook geene differentialen, of derzelver differentialen zijn = o. Men ziet hieruit de reden, waarom in eene vergelijking de veranderlijke grootheden door de eerſte, en de onveranderlijken door de laatſte letteren van het Alphabeth worden aangewezen. Zoodanig ook zijn de gemelde vergelijkingen tusſchen de coördinaten. Er is tusſchen de twee onbekende grootheden, (de abscis en de ordinaat) ſlechts *éene* vergelijking gegeven, dus kan uit dezelve alleen gevonden worden de betrekking tusſchen de coördinaten, tusſchen derzelver veranderingen en tusſchen derzelver differentialen.

Aanmerking. 4. De *Differentiaal rekening* (bl. 59) leert uit zoodanige vergelijking de vergelijking tusſchen de differentialen te vinden. Maar men kan ook omgekeerd uit de vergelijking tusſchen de differentialen van veranderlijke grootheden, de vergelijking tusſchen de veranderlijke grootheden zelve vinden. Dit leert de *integral rekening*. Zoo vindt men bij voorbeeld, indien de vergelijking tusſchen de coördinaten

ten gegeven is, de waarde van z uit de vergelijking $\delta z = \delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$ (Zie bl. 105, 101).

41.

VOORBEELDEN.

De volgende voorbeelden kunnen het gezegde ophelderen.

1°. VOORBEELD.

Laat de vergelijking tusschen de coördinaten eener lijn zijn $y^2 = 2ax - x^2$, waarin a eene standvastige grootheid is, en dus $\delta a = o$.

Dewijl $y = o$ indien $x = o$, volgt, dat het beginpunt der abscisſen in A is, waar de lijn de as snijdt.

Nu is volgens § 13, $2y\delta y = 2(a - x)\delta x$ dus

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \text{tang. } T = \frac{a-x}{y} = \frac{a-x}{\sqrt{\left(2ax - x^2\right)}}.$$

Het is dus *eene kromme lijn*, omdat T als afhangende van x eene veranderlijke grootheid is.

De Normaal is $= y \sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$

$$= y \sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{2ax - x^2}\right)} = \frac{ay}{\sqrt{\left(2ax - x^2\right)}} = a.$$

Zij

De Normaal is dus hier eene ſtandvastige grootheid, dat is, al de punten der kromme lijn ſtaan op gelijken afſtand van n. Dus is de kromme lijn *een cirkel*, waarvan het middelpunt n is, en waarvan de radius of normaallijn nm is a.

$$TP = \text{Subtangens} = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y^2}{a-x} = \frac{2ax-x^2}{a-x}$$

$$= x + \frac{ax}{a-x}$$

$$\text{dus } AT = \text{Subtangens} - x = \frac{ax}{a-x} = \frac{An.AP}{Pn}$$

of $AT : An = AP : Pn$.

2e VOORBEELD.

Laat de vergelijking zijn $y^2 = px$, waarin p eene ſtandvastige grootheid is. Dewijl $y = o$, indien $x = o$, is A het beginpunt der abscisſen.

Nu is $2y\delta y = p\,dx$, dus $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{p}{2y} = \text{tang.}T$. Het is dus *eene kromme lijn*, omdat T afhangt van y, en dus eene veranderlijke grootheid is. De Subnormaal is $= \frac{y\delta y}{\delta x} = \frac{p}{2}$. Zij is dus eene *ſtandvastige grootheid*, dat is, *Pn is voor elk punt der kromme lijn even groot.*

$$\text{Subtangens} = \frac{y\delta x}{\delta y} = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

Dus

Dus is de ſubtangens altijd gelijk aan de dubbele abscis, en wordt door de kromme lijn midden doorgedeeld, of $AT = AP$. Deze kromme lijn noemt men eene *Parabel*, terwijl de ſtandvastige grootheid p *Parameter* genoemd wordt. Voor het punt der Parabel, hetwelk gelijke Coördinaten heeft, zijn deze aan den *Parameter* gelijk, want alsdan is $y^2 = p\,x = x^2$ dus $y = x = p$. Neemt men $AP = x = \frac{1}{4}p$, dan wordt P het *brandpunt* genoemd, omdat evenwijdige ſtralen, op eenen paraboliſchen ſpiegel vallende, na de terugkaatſing zich in dit punt vereenigen. Voor deze abscis $x = \frac{1}{4}p$ is $y = \frac{1}{2}p$.

3°. VOORBEELD.

Laat de vergelijking zijn $y = ax + b$, zijnde a en b ſtandvastige grootheden. Dus $\frac{\delta y}{\delta x} =$ tang. $T. = a$; dus is de hoek T onveranderlijk, gevolglijk verandert de lijn hare rigting niet, en is dus *eene regte lijn*. Wanneer $x = o$ dan is $y = b$ en dus ſnijdt zij de as niet in het beginpunt der abscis, doch dit heeft plaats, wanneer $b = o$ of wanneer de vergelijking is $y = ax$.

De ſubtangens is $\frac{y\,\delta x}{\delta y} = \frac{y}{a} = x$ of gelijk aan de abscis voor de vergelijking $y = ax$, dus is $AT = o$, dus is de regte lijn en de Raaklijn van A een en dezelfde lijn.

42.

CIRKEL.

De lijn, welke den cirkel, waarvan wij (§ 22) eene genetiſche bepaling gegeven hebben, influit, en welke wij *cirkellijn* of *omtrek van den cirkel* noemen, is eene kromme lijn. Immers zijn al de lijnen (*de radiën*), welke uit het punt *B* (fig. 3) naar punten van die lijn kunnen getrokken worden, aan elkander gelijk, terwijl daarentegen uit een punt niet meer dan twee gelijke lijnen naar eene regte lijn kunnen getrokken worden.

Chorde is de lijn, welke twee punten van den cirkel vereenigt. Dezelve is dus in den cirkel, en in het algemeen in elke kromme lijn, hetzelfde, dat in eenen regtlijnigen veelhoek, of in eene gebrokene lijn, de diagonaal is. Zij ſnijdt van den omtrek des cirkels een gedeelte af, hetwelk men den *boog* noemt. Het gedeelte van eenen cirkel, bevat tusſchen eene chorde en deszelfs boog, wordt *ſegment* genoemd, terwijl daarentegen *ſector* genoemd wordt, dat gedeelte, hetwelk tusſchen twee radien en eenen boog bevat is.

De cirkellijn onderſcheidt zich daardoor van alle andere kromme lijnen, dat de *normalen* van alle punten aan elkander gelijk zijn, en alle uit hetzelfde punt uitgaan, hetwelk het *middelpunt* genoemd wordt. Deze normalen zijn dus de radien, welke op de differentialen der cirkellijn of op de *Tangen-*

ten

ten loodrêgt ſtaan. Hieruit volgt dadelijk, *dat de cirkel een regelmatige veelhoek is*, omdat deze veelhoek zoodanig een middelpunt heeft. Hij onderſcheidt zich daardoor van eenen regelmatigen *regtlijnigen* veelhoek, dat het middelpunt even zoo verre afſtaat van de zijden, als van de hoekpunten.

Uit deze gelijkheid der radien worden gemakkelijk de voornaamſte eigenſchappen van den cirkel afgeleid, zoo als:

1. Wanneer men twee bogen van eenen cirkel, of van gelijke cirkels, zoodanig op elkander plaatst, dat twee punten van den eenen cirkel met twee punten van den anderen overeenkomen, en de bolronde zijden naar denzelfden kant gekeerd zijn, dan zullen alle punten van den kleinen boog overeenkomen met de punten van den grooteren boog; gelijk ook zulks bij twee regte lijnen plaats heeft, die op elkander gelegd worden. Deze eigenſchap geeft men te kennen, door te zeggen, *dat een cirkel overal dezelfde kromming heeft.*

2. De hoeken, welke de radien aan het middelpunt van den cirkel met elkander maken, ſtaan in evenredigheid met de tegenoverſtaande bogen, en dus, indien een hoek aan het middelpunt in *n* gelijke deelen door lijnen gedeeld wordt, zal ook de tegenoverſtaande boog door die lijnen in even zoo vele gelijke deelen verdeeld worden. Dit is de reden, *waarom ook deze bogen tot meting der hoeken gebruikt*

bruikt worden, hoewel boog en hoek geheel ongelijkſoortige meetkundige grootheden zijn.

4. Elke middellijn deelt den cirkel en deszelfs omtrek midden door. Dus twee middellijnen, die loodregt op elkander ſtaan, deelen den cirkel en deszelfs omtrek in vier gelijke deelen, welke daarom Quadranten genoemd worden. De boog van eenen Quadrant ſtaat dus tegenover eenen regten hoek, en wordt daarom even zoo als een regte hoek (§ 28) in graden, minuten, ſeconden en tertiën verdeeld, omdat altijd een boog $= \frac{90^\circ}{n}$ tegenover eenen hoek ſtaat, die $\frac{1}{n}$ gedeelte is van eenen regten hoek.

5. Ook de hoeken, waarvan het hoekpunt niet het middelpunt van den cirkel is, kunnen door bogen van den cirkel gemeten worden. Is het hoekpunt in den omtrek des cirkels, dan is de hoek gelijk aan den halven boog, waarop hij ſtaat. Is hetzelve binnen den cirkel, doch niet in het middenpunt, dan is de hoek gelijk aan de halve ſom der bogen, welke door de wederzijds verlengde beenen afgeſneden worden. Is hetzelve buiten den cirkel, zoodanig dat de beenen van den hoek den omtrek ſnijden, dan is de hoek gelijk aan het halve verſchil der bogen, welke door die beenen afgeſneden worden. Hieruit volgt:

6. Het verſchil der rigting van twee differentialen van den cirkel in de punten *A* en *B* (fig. 15. bl. 117) is gelijk aan 180° — boog *AsB*, of de hoek *AaB*, welken twee Tangenten der punten *A* en *B* met elkander maken, is het ſupplement van den boog *AsB*. Indien dus dit verſchil van rigting 90° bedraagt, dan is de boog *AsB* = 90°. Indien de differentialen evenwijdig zijn, dan is dezelve = 180°.

7. De hoek, welken de chorde van den boog *AB* maakt met de differentiaal van het punt *A* of *B*, (dat is de hoek *aAB* = den hoek *aBA*) is gelijk aan den halven boog *AsB*.

8. De radius, welke loodregt ſtaat op eene chorde *AB*, deelt midden door de chorde, derzelver boog, den hoek aan het middenpunt, den Sector *mAsB*, het Segment *AsBA*, en verlengd zijnde ook den hoek *AaB* der Tangenten van *A* en *B*, en omgekeerd, indien hij een van deze midden doordeelt, deelt hij ook de overigen midden door, en ſtaat loodregt op de chorde. De middelpunten *m*, *s*, *n* van den cirkel, van den boog, en van de chorde zijn met het hoekpunt *a* der Tangenten in dezelfde regte lijn *mnsa*, dus de lijn, welke door twee van deze punten gaat, gaat ook door de twee andere punten.

9. Wanneer in eenen cirkel, en in cirkels van gelijke radiën, of de boogen, of de chorden, of de hoeken aan het middelpunt, of de Sectoren, of de Segmenten, of de gemelde hoeken der Tangenten gelijk zijn, dan zijn de overigen ook gelijk.

10.

10. Wanneer twee chorden elkander ſnijden, dan zijn de regthoekige Parallelogrammen, uit hare deelen gevormd, aan elkander gelijk, terwijl de hoek door dezelve gemaakt, gelijk is aan de halve ſom der bogen, welke zij inſluiten, gelijk zulks reeds (bl. 113) gezegd is. Wanneer dus de eene chorde de middellijn is, welke op de andere loodregt ſtaat, dan is de Regthoek, uit de ſtukken der middellijn gevormd, gelijk aan het vierkant der halve chorde. Is dus die middellijn de as, en het eene uiteinde der middellijn het beginpunt der abscisſen, dan hebben wij de vergelijking $y^2 = 2ax - x^2$ zijnde a de radius. Dit is de vergelijking van den cirkel, waaruit al de eigenſchappen van denzelven kunnen afgeleid worden (zie § 39 en 41).

43.

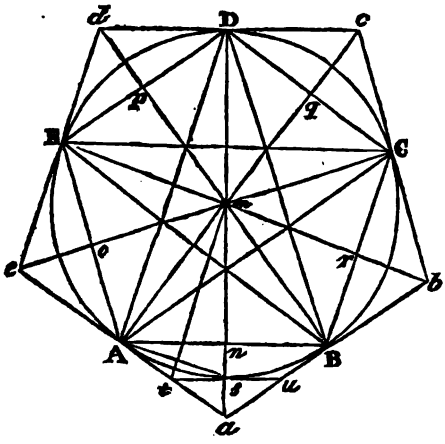
OVER DE REGELMATIGE VEELHOEKEN EN VERGELIJKING VAN DEZELVE MET DEN CIRKEL.

Dewijl de cirkel een regelmatige Veelhoek is, waarvan de zijden differentialen zijn, is het belangrijk, denzelven met eenen regelmatigen regtlijnigen Veelhoek te vergelijken. Al hetgeen eigen is aan de regelmatige Veelhoeken, en niet afhangt van het grooter of geringer getal der zijden, moet ook aan den cirkel toegeſchreven worden. Wij zullen dus hier de voornaamſte eigenſchappen van eenen regelmatigen regtlijnigen Veelhoek beſchouwen.

De gewone bepaling, welke men van eenen regelmatigen Veelhoek geeft, is deze, dat dezelve een Veelhoek is, *welke gelijke zijden en gelijke hoeken der zijden heeft.* Maar regelmatigheid van eenen Veelhoek, is eene zekere vorm van denzelven, welke dus bepaald wordt door de rigtingen van deszelfs hoekpunten, dat is door de rigtingen der lijnen, welke elk paar hoekpunten vereenigen, en welke men daarom *hoekpuntslijnen* zou kunnen noemen. *Deze hoekpuntslijnen zijn dus de zijden en de diagonalen der Veelhoeken.* De regelmatigheid van eenen regelmatigen Veelhoek moet dus gelegen zijn in de gelijkheid der hoeken, welke deze hoekpuntslijnen met elkander maken. Men kan dus deze bepaling geven, welke meer het wezen der zaak aantoont: *Een regelmatige regtlijnige Veelhoek is diegene, waarin al de hoeken, welke twee naastliggende hoekpuntslijnen met elkander maken, gelijk zijn.*

Fig.

Fig. 15.



Dus is b. v. de vijfhoek *ABCDE* regelmatig indien de volgende 15 hoeken aan elkander gelijk zijn:

BAC, *CAD*, *DAE*.
CBD, *DBE*, *EBA*.
DCE, *ECA*, *ACB*.
EDA, *ADB*, *BDC*.
AEB, *BEC*, *CED*, zijnde elke hoek $= \frac{2n-4}{n.(n-2)}$ regte hoeken, waar n het getal der zijden aanwijst.

Hieruit volgt, dat in eenen regelmatigen veelhoek

1. de hoeken gelijk zijn, welke de zijden met elkander maken, zoo als de hoeken *EAB*, *ABC*, *BCD* enz.
2. dat ook de zijden zelven aan elkander gelijk zijn.

3. Dat omgekeerd de veelhoek regelmatig is, indien de zijden en derzelver hoeken aan elkander gelijk zijn.

4. Deel twee hoeken EAB en ABC in twee gelijke deelen door de lijnen Am en mB, trek uit m loodlijnen mn, mo, mp, mq en mr op de zijden, dan zullen deze loodlijnen gelijk zijn, zoo als ook de lijnen mA, mB, mC, mD en mE, uit dit punt naar de hoekpunten getrokken. Dus wanneer twee hoeken van eenen regelmatigen veelhoek in twee gelijke deelen door twee lijnen gedeeld worden, dan zullen deze lijnen elkander in een punt ontmoeten, hetwelk op gelijken afstand staat, zoowel van de zijden, als van de hoekpunten. Dus elke regelmatige veelhoek heeft zoodanig een middelpunt.

5. Wanneer men dus uit dit middelpunt m met den radius mA (*radius der hoeken* genoemd) eenen cirkel beschrijft, dan zal deze cirkel door al de hoekpunten van den veelhoek gaan, in welk geval men zegt, *dat de veelhoek in den cirkel beschreven is.* Elke zijde van den veelhoek van n zijden, is alsdan de chorde van eenen boog van $\frac{360^\circ}{n}$ of de dubbele Sinus van eenen boog van $\frac{180^\circ}{n}$.

6. Wanneer men uit hetzelfde middenpunt met den radius mn (*radius der zijden* genoemd) eenen cirkel beschrijft, dan gaat dezelve door de punten n, o, p, q, r. In dit geval *is de cirkel binnen den veelhoek beschreven*, of

of *de veelhoek is om den cirkel, wiens radius is m n, beſchreven.* De zijden van denzelfden veelhoek zijn alsdan tangenten van dezen cirkel, en wel zoodanig, dat elke zijde zoo als AB, de dubbele tangens is van den boog $\frac{180^\circ}{n}$ voor den radius $m n$, terwijl $m n = \sqrt{m A^2 - A n^2}$ is. Men ſtel den *radius van den omgeſchreven cirkel* gelijk aan de eenheid, en a de zijde van den Veelhoek, welke daarin beſchreven is, dan is de *radius m n van den ingeſchreven cirkel*

$$= \sqrt{\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2.4.}\left(\frac{a}{2}\right)^4$$

$$- \frac{3}{2.4.6}\left(\frac{a}{2}\right)^6 - \frac{3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{2}\right)^8 - \frac{3.5.7}{2.4.6.8.10}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{10} - \ldots,$$ welke reeks zeer ſterk convergerende is, wanneer a een zeer klein gedeelte der eenheid is. Men vindt op deze wijze, dat bij eenen veelhoek, waarvan het getal der zijden is $n = 3.2^{23} = 25165824$ deze twee radien tot aan de 13de decimaal met elkander overeenkomen. De omtrek van den veelhoek is $n.a$, welke kleiner is dan de omtrek van den omgeſchreven, doch grooter is dan die van den ingeſchreven cirkel. Om dus, met eene juistheid tot de dertiende decimaal gaande, den omtrek van den cirkel te vinden, zou men berekenen de

zijde van eenen 3.2^{23} Veelhoek, en deze zijde met 3.2^{23} vermenigvuldigen.

7. Om de zijden van eenen veelhoek van 3.2^p zijden (zijnde p een eindig, positief en geheel getal) te vinden, dient het volgende:

Trek As dan is dezelve de zijde van eenen $2n$ hoek, indien AB de zijde is van eenen n hoek. Stel $AB = a$, $ms = 1$

dus $As^2 = An^2 + ns^2 = \frac{1}{4}a^2 + (ms - mn)^2$.

$= \frac{1}{4}a^2 + (1 - mn)^2 = \frac{1}{4}a^2 + 1 - 2mn + mn^2$

$= \frac{1}{4}a^2 + 1 - 2mn + 1 - \frac{1}{4}a^2 = 2 - 2mn =$

$2 - 2\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)}$ dus $AS = \sqrt{\left(2 - 2\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)}\right)}$.

Dewijl de zijde van eenen regelmatigen zeshoek, in den cirkel beschreven, gelijk is aan den radius van dien cirkel, kan men dus dezen Veelhoek ten grondslag leggen. De zijde van eenen twaalfhoek zal dus volgens deze formule zijn $\sqrt{\left(2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}\right)} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)}$. Deze zijde gevonden hebbende berekent men op gelijke wijze de zijde van eenen 24 hoek, en zoo vervolgens de zijden van de veelhoeken, waarvan het getal der zijden is 3.2, 3.2^2, 3.2^3, 3.2^4 .... 3.2^p.

De volgende tafel wijst aan de zijden van de regelmatige veelhoeken, uit deze reeks genomen, begin-

ginnende met $p = 2$ en eindigende met $p = 23$. Deze zijden, welke hier tot aan 21 decimalen bere-

kend zijn, zijnde de chorden der bogen van $\frac{360^\circ}{3.2^p}$, ko-

men des te meer met hunne bogen overeen, hoe rooter p is. Om den graad van overeenkomst aan e wijzen, zijn die eerſte decimalen, welke ook deci-alen van den boog zijn, van de anderen afgeſchei-en door het teeken _____|, waaruit men bij voor-

eeld ziet, dat de boog en de chorde van $\frac{3375''}{65536}$ f de zijde van den 3.2^{23} veelhoek, tot in de erſte 21 decimalen met elkander overeenſtemmen. Wanneer de eerſte decimalen der zijde van den 3.2^p elhoek, met twee vermenigvuldigd zijnde, overeen-omen met de eerſte decimalen der zijde van den 2^{p-1} veelhoek, dán komt de zijde van dezen tſten veelhoek en deszelfs boog in die eerſte deci-alen met elkander overeen.

TAFEL DER ZIJDEN VAN REGELMATIGE VEELHOEKEN VAN 3.2^p ZIJDEN OF DER CHORDEN VAN $\frac{360^\circ}{3.2^p}$, ALSMEDE DER BOGEN VAN $\frac{360^\circ}{3.2^p}$; ZIJNDE DE RADIUS = 1.

Zijde van den 3.2^2	=12 hoek, of de Chorde van	30°	=0,5|17	638	090	205	041	524	699...
3.2^3	=24	15°	=0,261|	052	384	440	103	183	047...
3.2^4	=48	$7^\circ 30'$	=0,130	8|06	258	460	286	133	634...
3.2^5	=96	$3^\circ 45'$	=0,065	4|38	165	643	552	284	127...
3.2^6	=192	$1^\circ 52' 30''$	=0,032	72|3	463	252	973	563	386...
3.2^7	=384	$56' 15''$	=0,016	362|	279	207	874	258	570...
3.2^8	=768	$28' 7''\frac{1}{2}$	=0,008	181	2|08	052	469	579	190...
3.2^9	=1536	$14' 3''\frac{3}{4}$	=0,004	090	61|2	582	328	190	229...
3.2^{10}	=3072	$7' 1''\frac{7}{8}$	=0,002	045	307|	360	676	592	304...
3.2^{11}	=6144	$3' 30''\frac{15}{16}$	=0,001	022	653	8|14	007	394	474...
3.2^{12}	=12288	$1' 45''\frac{15}{32}$	=0,000	511	326	92|3	724	834	612...
3.2^{13}	=24567	$52''\frac{47}{64}$	=0,000	255	663	46|3	951	309	480...
3.2^{14}	=49152	$26''\frac{47}{128}$	=0,000	127	831	732|	236	766	262...
3.2^{15}	=98304	$13''\frac{47}{256}$	=0,000	063	915	866	1|51	022	071...
		$6''\frac{303}{512}$	=0.000	031	957	933	0|79	590	903...
		$3''\frac{303}{1024}$	=0,000	015	978	966	540|	305	425...
		$1''\frac{1327}{2048}$	=0,000	007	989	483	270	2|16	465...
		$\frac{3375}{4096}''$	=0,000	003	994	741	635	11|6	201...
		$\frac{3375}{8192}''$	=0,000	001	997	370	817	559|	097...
		$\frac{3375}{16384}''$	=0,000	000	998	685	408	779|	673...
		$\frac{3375}{32768}''$	=0,000	000	499	342	704	389	85|2...
		$\frac{3375}{65536}''$	=0,000	000	249	671	352	194	928|...

Care in trimming

Page----------

Page----------

Wanneer men de getallen in deze tafel met het getal der zijden vermenigvuldigt, dan vindt men den omtrek in deelen van den radius des te naauwkeuriger, hoe grooter het getal der zijden is. Deelt men het gevondene getal door twee, dan vindt men een getal, hetwelk aanwijst den omtrek in deelen van de middellijn. Dit laatſte getal pleegt men door de letter π aan te wijzen, zoodat de omtrek is 2π.

Vermenigvuldigen wij b. v. het laatſte getal in de tafel voorkomende of de zijde van den 25165824 hoek met 25165824 dan vinden wij

6,283, 185, 307, 179, 571, 740, 672

dit deelende door twee, vindt men

3,141, 592, 653, 589, 785, 870.

Maar π is

3,141, 592, 653, 589, 793, 238

zoodat de dertien eerſte decimalen, gelijk wij bl. 119 gezegd hebben, met π overeenkomen. Voor het gewoon gebruik is het voldoende, dat de drie eerſte decimalen daarmede overeenkomen.

ARCHIMEDES vond voor π den breuk $\frac{22}{7} = 3,1428...$ welk getal ſlechts in de twee eerſte decimalen met het ware overeenkomt. LUDOLF van *Keulen* berekende π met eene naauwkeurigheid van 40 decimalen.

7. Men kan ook op de volgende wijze tot de bepaling van den omtrek des cirkels komen.

Op dezelfde wijze, als men berekent den omtrek van een-

eenen n hoek, en van eenen $2n$ hoek *in den cirkel beſchreven*, berekent men ook dien van eenen n hoek, en van eenen $2n$ hoek *om den cirkel beſchreven*. De omtrek van den cirkel zal altijd grooter zijn, dan van den n hoek in den cirkel beſchreven, en kleiner zijn dan van den n hoek om den cirkel beſchreven, zoodat men altijd door vergelijking der omtrekken van deze veelhoeken kan zien, met welken graad van naauwkeurigheid de omtrek des cirkels gevonden is. Op deze wijze hebben ARCHIMEDES en andere getracht den omtrek van den cirkel te vinden.

8. *Om de zijden van den omſchreven veelhoek te vinden*, dient het volgende:

Laat een n hoek $ABCDE$ (fig. 15) beſchreven zijn in den cirkel, wien radius mA voor de eenheid wordt aangenomen, en ſtel gelijk te voren deszelfs zijde $= a$. Trek door de hoekpunten A, B, C, D, E Tangenten, dan zullen deze door hare zamenkomst eenen n hoek vormen, rondom dien cirkel beſchreven.

Omdat de regthoekige driehoeken Amn en Ana gelijkvormig zijn, heeft men ſtellende $en = 2$ $Aa = b$; $na : Aa = An : Am$.

of $\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2\right)} : \frac{b}{2} = \frac{1}{2}a : 1$

dus $\frac{1}{16}a^2b^2 = \frac{b^2 - a^2}{4}$ of $\frac{1}{4}a^2b^2 = b^2 - a^2$

of $\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)b^2 = a^2$, dus $b = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)}}$.

Hier-

Hierdoor vindt men dus, wanneer a is de zijde van den n hoek in den cirkel beſchreven, en b de zijde van den n hoek om den cirkel beſchreven.

Trek tu de tangens van s, dan is dezelve de zijde van den $2n$ hoek om den cirkel beſchreven. Stel dezelve c.

Uit hoofde van de gelijkvormigheid der driehoeken Ana en tsa, is

$ts : An = at : Aa = Aa - At : Aa$ en $At = ts = \frac{1}{2}c$

dus $\frac{1}{2}c : \frac{1}{2}a = \frac{b-c}{2} : \frac{b}{2}$ of $bc = ab - ac$

dus $c = \frac{ab}{a+b}$.

Wil men intusſchen c bepalen alleen door de waarde van a, dan is $c = \frac{a}{\frac{a}{b}+1} = \frac{a}{1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)}}$ (bl. 124.)

Men vindt op deze wijze de zijde van den $2n$ hoek om den cirkel beſchreven.

9. Ook is, ſtellende $mA = 1$,

$a = 2An = 2 \mathit{ſin}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$b = 2Aa = 2 \mathit{tang}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$c = 2ts = 2 \mathit{tang}\left(\frac{90^\circ}{n}\right)$

$mn = \mathit{cos}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

dus $a.mn = \mathit{ſin}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$

10.

10. De inhoud dezer veelhoeken wordt gemakkelijk berekend, wanneer de zijde bekend is. Wanneer de radius van den cirkel de eenheid is, dan is

1. De inhoud van den n hoek *in den cirkel beſchreven*

$$= n \Delta mAB = \frac{n.mn.AB}{2} = \frac{1}{2} na \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2} n \text{ſin.} \left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

2. De inhoud van den $2n$ hoek *in den cirkel beſchreven*

$$= 2n \Delta mAs = n.ms.An = \frac{1}{2} an = n \text{ſin.} \left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

3. De inhoud van den n hoek *om den cirkel beſchreven*

$$= n \Delta mae = \frac{n.b}{2} = \frac{\frac{1}{2} na}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)}}$$

$$= n \text{ tang.} \left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

4. De inhoud van eenen $2n$ hoek *om den cirkel beſchreven*

$$= 2n \Delta mtu = 2n.ms.ts = \frac{na}{1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)}}$$

$$= 2n \text{tang.} \left(\frac{90^\circ}{n}\right).$$

In het algemeen is dus de inhoud van eenen regelmatigen veelhoek gelijk aan dien van een regthoekig Parallelogram, waarvan de baſis is de omtrek, en de hoogte de halve loodlijn uit deszelfs middelpunt op een

een der zijden getrokken. Deze loodlijn (*Apotema* van de Grieken genoemd) is bij den cirkel de radius, omdat dezelve op de differentialen der cirkellijn loodregt ſtaat. Dus is *de inhoud van den cirkel gelijk aan een regthoekig Parallelogram, waarvan de baſis is de omtrek, en de hoogte de halve radius en dus* $= \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$ en $= \pi$, indien de radius de eenheid is.

11. Indien de inhouden dezer vier veelhoeken zijn p, q, r, s dan is $pr = q^2$ en $s = \frac{2pr}{p+q}$.

12. De inhoud van den cirkel is tuſſchen p en r en tuſſchen q en s. Zoo heeft men b. v.:

zijde van den		inhoud
6 hoek binnen den cirkel	=1,0000000 .	2,5980762
„ om „ „	=1,1547006 .	3,4641018
12 hoek binnen „ „	=0,5176380 .	3,0000000
„ om „ „	=0,5358984 .	3,2153904
24 hoek binnen „ „	=0,2610524 .	3,1058280
„ om „ „	=0,2633050 .	3,1596600
48 hoek binnen „ „	=0,1308602 .	3,1326288
„ om „ „	=0,1310870 .	3,1460880
96 hoek binnen „ „	=0,0654382 .	3,1406448
„ om „ „	=0,0654732 .	3,1427136
192 hoek binnen „ „	=0,0327234 .	3,1410432
„ om „ „	=0,0327278 .	3,1418688

Dus de gelijkvormige Veelhoeken van 192 zijden bin-

binnen en buiten den cirkel beſchreven, komen, wat de zijde aangaat, tot 5 decimalen, en wat den inhoud aangaat tot drie decimalen met elkander overeen. Dus tot 3 decimalen komt ook de inhoud van eenen 192 hoek, in of buiten den cirkel beſchreven, met dien van den cirkel overeen.

13. Het volgende kan ook hier ter vergelijking dienen. Laat de as gaan door het middelpunt en door een der hoekpunten van eenen regelmatigen veelhoek van n zijden, en het hoekpunt voor het beginpunt der abſcisſen gehouden worden, dan geldt voor elk hoekpunt de vergelijking der regthoekige coördinaten $y = \sqrt{(2x - x^2)}$, zijnde de radius der hoeken $= 1$. De vergelijking geldt dus niet voor alle, maar ſlechts voor n bepaalde waardijen van x. Dan alleen geldt dezelve voor alle mogelijke waardijen van x tusſchen 0 en 2 gelegen, wanneer n grooter is, dan elk bepaald getal, en in dit geval wordt $y = \sqrt{(2x - x^2)}$ *de vergelijking van eenen cirkel.*

Hetzelfde geldt van andere niet regelmatige veelhoeken, of van elke gebrokene lijn, indien er eene vergelijking is tusſchen de coördinaten der hoekpunten.

Aanmerking. La croix zelf ſchijnt deze beſchouwing der kromme lijnen goed te keuren, daar hij zegt: (*q*)

Leib-

(*q*) *Traité élémentaire de Calcul Differentiel et de Calcul Integral.* 3 Ed. p. 81.

LEIBNITZ a toujours envisagé le Calcul differentiel sous un point de vue à peu près semblable. „Sen„tio autem et hanc et alias (methodos) hactenus „adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam „meo dimentiendorum curvilineorum principio, quod „figura curvilinea censenda sit aequipollere poly„gono infinitorum laterum, unde sequitur, quid„quid de tali polygono demonstrari potest, sive „ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum re„spectus, sive ita ut tanto magis verificetur, quan„to major sumitur laterum numerus, ita ut error „tandem fiat quovis dato minor; id de curva posse „pronuntiari." (*Acta Euriditorum anno* 1684, pag. 585.)

LA CROIX voegt er bij: „il est évident, que „cette métaphysique est aussi très lumineuse et ne „diffère de celle que j'ai présentée ci dessus, que „parceque la limite y est désignée comme un poly„gone d'un nombre infini de cotés infinement petits."

44.

KROMLIJNIGE HOEKEN.

Ingevolge onze beschouwing is er geen ander hoek dan de regtlijnige, gevormd door twee regte lijnen, die elkander in een punt ontmoeten, en dus in hetzelfde vlak gelegen zijn. Wij zullen ook in het

vervolg zien, dat de zoogenoemde *ſtandhoek*, of *tweevlakkige hoek*, niet anders is dan de hoek, welken twee lijnen met elkander maken, die zich in een punt der doorſnede van twee vlakken ontmoeten, en loodregt ſtaan, de eene op het eene, de andere op het andere vlak.

Men gebruikt evenwel de uitdrukking van *kromlijnige* en van *ligchamelijke* of *veelvlakkige* hoek (angulus curvilineus, ſolidus, multiplanus). Wat deze woorden aanwijzen, zal uit het volgende blijken. Wij bepalen ons thans vooreerst tot den *kromlijnigen* hoek.

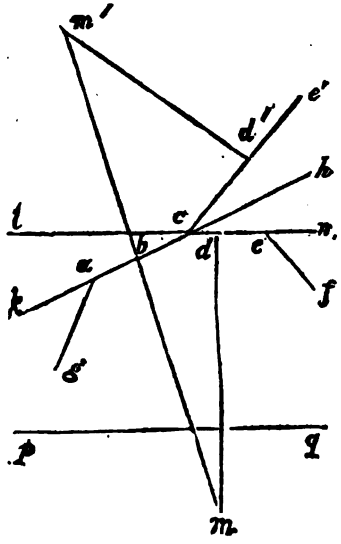
1. *De hoek, welken de deelen van dezelfde regte lijn, en dus ook derzelver differentialen met elkander maken, is* = 0, *en dus geen differentiaalhoek.*

2. *De ſcherpe hoek, welken de twee elkander opvolgende differentialen van dezelfde kromme lijn met elkander maken, is een differentiaalhoek, gevormd door twee naastliggende tangenten der kromme lijn, en dus gelijk aan den hoek, welken twee naastliggende normalen met elkander maken.*

Men noemt dezen hoek de *kromming der kromme lijn voor een bepaald punt.* Deze kromming kan men bepalen door eenen cirkel (de kromtecirkel genoemd), die met den boog eener kromme lijn aan een punt eene gelijke kromming heeft, omdat een cirkel overal dezelfde kromming heeft.

Fig.

Fig. 17.



Laat, om dit op te helderen, *g a c e f* eene gebrokene lijn zijn, verleng *a c* en *c e*, zoodat zij de lijnen *k h* en *l n* worden, welke elkander in het punt *c* ſnijden. Trek op dezelve, en wel op het midden van *a c* en *c e* de loodlijnen *b m* en *m d*, dan zijn *a m*, *m c* en *m e* de ſtralen van eenen cirkel, welke door de punten *a*, *c* en *e* gaat, terwijl de hoek *b m d* gelijk is aan den hoek *l c k*, welken de lijnen *k h* en *l n* met elkander maken. Laat de as *p q* evenwijdig zijn aan *l n*, dan heeft het punt *c* of *e* de grootſte ordinate, dat is eene ordinate, welke grooter is dan die van de punten *a*, *g* en *f*, omdat de hoe-

ken gac, ace, cef uitſpringende hoeken zijn. Dit is het geval niet, wanneer het op ac volgende deel is ce', en dus ace' een inſpringende hoek. Trek door het middenpunt van ce' de loodlijn $m'd'$ welke de verlengde loodlijn mb ontmoet in m', dan is m' het middenpunt van den cirkel, welke gaat door ace', hetwelk dus op de andere zijde valt.

Hoe kleiner de deelen der gebrokene lijn genomen worden, des te meer nadert zij de kromme lijn. Wordt dezelve eene kromme lijn, waarvan g, a, e, f punten zijn, dan zijn kh en ln tangenten der kromme lijn voor de punten a en e, de hoek lck dezer tangenten, is de hoek, welken de twee naastliggende differentiaallijnen in het punt c met elkander maken. De cirkel, waarvande radiën zijn am, mc, me, waarvoor hier kan geſteld worden bm en md, welke in de rigting der normalen loopen, gaat door de drie punten a, c, e, en wordt de *kromming cirkel* genoemd, en deszelfs radiën zijn de *kromteſtralen*. De hoek m, welken de kromteſtralen of normalen met elkander maken, is gelijk aan den gemelden hoek lck der tangenten.

Hiernaar wordt gemakkelijk bepaald, wat de verſchillende ſoorten van punten eener kromme lijn zijn, welke men noemt *buigpunten*, *keerpunten van de eerſte en tweede ſoort*, enz. Indien de hoeken der differentialen gac, ace, cef uitſpringende hoeken zijn, dan is de kromme lijn met hare *concave* zijde naar de as gekeerd, en indien lce evenwijdig is aan de as pq, dan heeft c de grootſte ordinate. Maar indien de kromme lijn

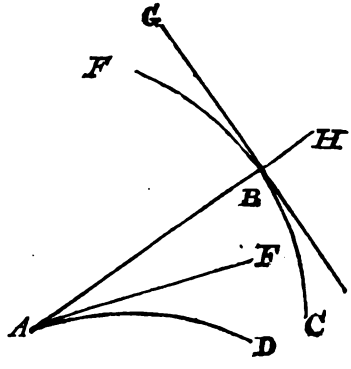
gaat

gaat door e', zoodat de hoek $a c e'$ een inſpringende hoek wordt, dan verandert de kromme lijn zoodanig van rigting, dat hare *convexe* zijde naar de as $p q$ wordt gekeerd. Het punt c heeft dan niet de groot ſte ordinate, maar is een *buigpunt*. Ook wordt alsdan de kromteſtraal negatif, omdat $m' b$ eene rigting heeft tegengeſteld aan die van $m b$.

Indien de kromme lijn achtervolgens gaat door de punten $e c a c e'$, dan heeft er een *keerpunt* plaats; $a h$ is dan de *gemeenſchappelijke tangens*, van de twee takken $a c e$ en $a c e'$ dezer kromme lijn, enz.

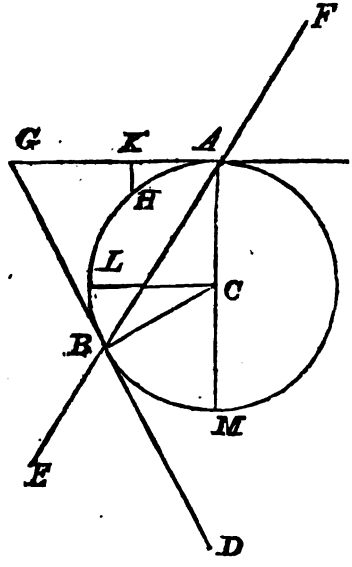
3. *De hoek, welken eene regte lijn met eene kromme lijn maakt, is de hoek, welken hare rigting maakt met de rigting der kromme lijn in het punt der ontmoeting.* Het is dus de hoek, welken de regte lijn maakt met de tangens der kromme lijn van het punt der ontmoeting.

Fig. 18.



Om dus te bepalen den hoek, gevormd door de lijn ABH (fig. 18), en de kromme lijnen AD en FBC in de punten A en B, trekke men de tangenten GB en AF der kromme lijnen in die punten, dan zijn de hoeken GBH en FAB de zoogenoemde kromlijnige hoeken.

Fig. 19.

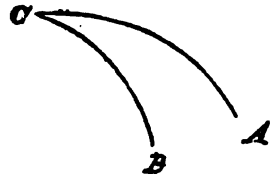


Indien dus GA en GB (fig. 19) tangenten van den cirkel zijn, dan zijn de hoeken GAB en GBA, welke beide gelijk zijn aan den halven boog AHB, diegenen, welke de chorde AB of secans EF met de cirkellijn maakt.

4. Hieruit volgt, *dat de zoogenaamde hoek van aanraking* (*angulus contactus*) HAG, welken de tangens met de cirkellijn maakt, in den ſtrengſten zin $= 0$, en dus geen *differentiaalhoek* is.

Hetzelfde geldt van de hoeken, welke andere kromme lijnen met de tangens in het punt der aanraking vormen, zoo als de hoeken DAF en GBF (fig. 18). Er zijn dus geene *anguli contactus*, en het is ongerijmd, dezelve te deelen. Men kan een oneindig getal cirkels trekken, waarvan de gemeenſchappelijke tangens is GA, en waarvan dus de middelpunten in de lijn AC en derzelver verlengde zijn gelegen. De bogen van al deze cirkels vallen binnen de ruimte GAH, indien derzelver radius grooter is dan AC, en verdeelen dus de lijnen KH en GB in een onbepaald getal van deelen, maar zij deelen niet den hoek KAH, welken de tangens met de kromme lijn in het punt A maakt; want deze beſtaat even zoo min als een hoek, welken eene regte lijn met zich zelve maakt.

Fig. 20.



5. *De hoek van twee kromme lijnen C A en C B is de hoek der beide rigtingen van dezelve in het punt der ontmoeting C, en dus de hoek, welken de twee tangenten derzelver in dat punt met elkander maken.*

6. Hieruit volgt ook, *dat de hoek van twee of meer cirkels, die elkander uit- of inwendig raken* = o *is.* Zij hebben daarom ook eene gemeenſchappelijke tangens, welke de gemeenſchappelijke rigting van al deze cirkels in het raakpunt aanwijst.

7. Hetzelfde geldt van alle kromme lijnen. De hoek, welken dezelve met elkander in het punt van aanraking maken, in welk punt zij dus eene gemeenſchappelijke tangens hebben, is = o.

Aanmerking. Daar men zich geen naauwkeurig denkbeeld vormde van den aard der kromme lijnen, derzelver differentialen en tangenten, heeft men wonderbaar over de hoeken, welke de kromme lijnen onder elkander,

en

en met derzelver tangenten, en met andere regte lijnen maken, geoordeeld, en even zoo wonderbaar de zwarigheden getracht weg te nemen, welke niet in de zaak zelve, maar in het verkeerd begrip, dat men zich daarvan vormde, gelegen waren.

EUCLIDES zegt in zijne *Elementa*, Stelling 16, boek 3: „*De hoek, welken de halve cirkel M B A* (fig. 19) *met* „*de middellijn A M maakt, is grooter dan elke ſcherpe* „*hoek, maar de overige hoek M B A G, welken de halve* „*cirkel met de tangens maakt, is kleiner dan elke ſcherpe* „*hoek.*"

Hierop is aan te merken, dat het niet geheel naauwkeurig is, te ſpreken van eenen hoek, welken een halve cirkel (die toch oneindig vele rigtingen heeft) met de middellijn of de tangens maakt, maar dat wij moeten ſpreken *van hoeken, welke de middellijn of tangens maakt met de rigtingen der cirkellijn in die punten, waar zij dezelve ontmoeten*, en dan is de eerſte hoek een regte hoek, en de andere = 0.

Deze ſtelling heeft aanleiding gegeven tot eenen hevigen twist tuſſchen PELETARIUS en CLAVIUS. PELETARIUS zag eene tegenſtrijdigheid in deze Euclidiſche ſtelling. „Het „is ongerijmd," beweerde hij, „dat eene grootheid de „kleinſte zou kunnen zijn, dewijl zij toch, voor zoo „verre zij eene grootheid is, uit deelen beſtaat. EUCLIDES „ſtelt evenwel den hoek van aanraking kleiner, dan el„ken ſcherpen hoek. Deze tegenſtrijdigheid kan daar„door weggenomen worden, dat men ſtelt, gelijk geſteld „moet worden, dat de tangens met de cirkellijn geenen „hoek maakt, omdat elke hoek in doorſnijding (*ſectione*) be„ſtaat, niet in aanraking. De binnenſte en buitenſte aanra-

„king van eenen cirkel, of van eene regte lijn met „eenen cirkel *is geen hoek*, en de hoek van de middel- „lijn en den omtrek *is een regte hoek*."

Hierop antwoordt CLAVIUS:

„De hoek der tangens en der cirkellijn is niet de „kleinſte grootheid, maar kan integendeel door cirkel- „lijnen in het oneindige verdeeld worden. Hij kan dus „oneindig grooter worden, zonder dat hij een ſcherpe „hoek worde. De hoeken, welke de cirkellijnen met „de middellijnen maken, zijn ongelijk, de eene is „grooter dan de andere, naarmate de radius grooter is. „Elke hoek beſtaat in een punt en eene helling van lijnen, „welke niet in dezelfde rigting zijn (non in directum „jacent). Dus diegenen zijn gelijk, waarbij dezelfde „helling der lijnen is, zoodat die lijnen, op elkander „geplaatst, elkander bedekken. Dus die hoeken van aan- „raking zijn alleen gelijk, wier cirkellijnen denzelfden „radius hebben, enz." (*r*)

Men ziet, dat de geheele ſtrijd hierop gegrond was, dat men in de bepaling van eenen hoek niet met elkander overeenſtemde. PELETARIUS verklaart voor het overige, dat hij niet beweert, dat de hoek van aanraking niets zij, maar alleen, dat dezelve geene grootheid zij.

TACQUET tracht op eene andere wijze de zwarigheid der Euclidiſche ſtelling weg te nemen, en den ſtrijd tuſſchen CLAVIUS en PELETARIUS te beſliſſen. Hij beweert namelijk, dat niet alleen de hoek van aanraking, maar ook zelfs de regtlijnige hoek geene grootheid zij. Hij tracht dit uitvoerig en bondig te betoogen. Is zijn bewijs vol-

(*r*) Zie CLAVIUS, *Opera Mathem.* 1612. T. I, p. 117.

voldoende, dan is voorzeker al hetgeen wij van de hoeken gezegd hebben, en dus het grootſte gedeelte onzer bepalingen, verkeerd en ongerijmd. Het zal dus niet overtollig zijn, de gronden, welke TACQUET aanhaalt, hier nader te overwegen, te meer, daar ik niet weet, dat zulks ergens opzettelijk geſchied zij.

Nadat TACQUET (s) de zwarigheden, welke uit de ſtelling van EUCLIDES ontſtaan, aangewezen had, gaat hij op deze wijze voort:

„ Deze en andere ſtellingen pleegt men uit die van „ EUCLIDES af te leiden. Zijn dezelve zoodanig, als men „ ze voorſtelt, dan mag men dezelve te regt voor onbe„ grijpelijk houden. PELETARIUS, om zich uit die pa„ radoxen te redden, zegt, dat *de aanrakinghoek geene* „ *grootheid zij*. Had hij gezegd, *dat geen hoek eene* „ *grootheid zij*, dan zou hij de zaak beſlist hebben. Maar „ hij vergist zich grootelijks, dat hij daaruit afleidt, dat „ alle hoeken, welke de middellijn met den omtrek „ maakt, gelijk zijn; hetgeen hij zeker niet zou doen, „ indien hij begreep, dat, hetgeen hij van den aanra„ kinghoek zegt, aan alle hoeken eigen is. Ook ſtem „ ik niet toe, hetgeen onze CLAVIUS in zijne verdedi„ ging tegen PELETARIUS zegt, *dat alle hoeken grootheden* „ zijn. Anderen meenen alle zwarigheden te kunnen „ wegnemen, door te zeggen, dat *kromlijnige en regt„ lijnige hoeken niet met elkander kunnen vergeleken wor„ den*. Vraagt men naar de reden, dan is het antwoord: „ *omdat de aanrakinghoek, hoe ook vermenigvuldigd, nooit* „ *aan eenen regten of ſcherpen hoek gelijk wordt*. Maar „ juist

(s) *Elementa Geometriae Euclideae*. Pars I, p. 74. seq.

„ juist deze is van alle paradoxen de grootſte, en waar-
„ van men eene verklaring vroeg, namelijk, *hoe het mo-*
„ *gelijk zij, dat een aanrakinghoek een gedeelte zij van*
„ *eenen regten hoek, en echter, hoe ook vermenigvuldigd,*
„ *denzelven nooit kan overtreffen.* Zij antwoorden, dat
„ de aanrakinghoek geen gedeelte zij van eenen regten
„ hoek, omdat hij aan denzelven niet kan gelijk worden.
„ Doch hiertegen zegt men, dat daaruit alleen volgt,
„ dat de aanrakinghoek geen opgaand deel van eenen
„ regten hoek is (pars aliquota), maar dat hij toch daar-
„ van een deel is, omdat hij met den hoek, dien de
„ middellijn met den omtrek maakt, eenen regten hoek
„ zamenſtelt. Men had dus, om op deze wijze de zwa-
„ righeid weg te nemen, moeten aantoonen, dat de
„ aanrakinghoek in geen opzigt een gedeelte is van
„ eenen regtlijnigen hoek, en dat hij met den gemelden
„ hoek nooit eenen regten hoek zamenſtelt."

„ Ik *geloof, dat de geheele zaak afhangt van de bepa-*
„ *ling, welke* EUCLIDES *van den hoek geeft.* Deze bepa-
„ ling, namelijk, indien men ze naauwkeuriger be-
„ ſchouwt, toont duidelijk aan, dat geen hoek eene
„ grootheid zij. Neemt men deze dwaling weg, dan
„ verdwijnen alle paradoxen. Zie hier mijn gevoelen.

1. „ *Een hoek is geene grootheid* (*quantitas*), *maar*
„ *eene hoedanigheid* (*modus quantitatis*), want dit is de
„ bepaling van EUCLIDES: *Een vlakke hoek is de helling*
„ *van eene lijn tot de andere*, enz. *Helling* der
„ lijnen is geene grootheid, maar eene *hoedanigheid der*
„ *grootheid. Kromming* is toch geene grootheid; waarom
„ zou dan helling eene grootheid zijn, welke van krom-
„ ming niet meer verſchilt dan *buiging* en *breking*? Ver-

„ vol-

„ volgens, *indien een hoek eene grootheid was, dan zou*
„ *dezelve of eene lijn, of een vlak, of een ligchaam zijn.*
„ Het blijkt van zelve, dat hij noch lijn, noch ligchaam
„ is. Maar hij is ook geen vlak, want dit vermindert,
„ wanneer men daarvan deelen wegneemt, doch de hoek
„ wordt niet kleiner, wanneer men de beenen kleiner
„ maakt. Ook kan men niet zeggen, dat een hoek een
„ onbepaald vlak zij, dewijl elke hoek bepaald is. (*t*)

2. „ Dewijl een hoek dus geene grootheid, maar
„ eene hoedanigheid der grootheid is, *is de betrekking*
„ *der hoeken tot elkander geene gelijkheid en ongelijkheid,*
„ *maar gelijkvormigheid en ongelijkvormigheid* (non est aequalitas et inaequalitas, sed similitudo et dissimilitudo).

3. „ Wanneer men dus zegt, dat twee hoeken gelijk
„ of ongelijk zijn, kan men hierdoor niet anders ver-
„ staan, dan *dat dezelve onder elkander gelijkvormig of*
„ *ongelijkvormig zijn* (similes et dissimiles).

4. „ Voorts zijn hoeken gelijkvormig, wanneer hunne
„ beide beenen bij de op elkander plaatsing overeenko-
„ men, en ongelijkvormig, indien dezelve niet overeen-
„ komen. Immers is een hoek niet anders dan de hel-
„ ling van de eene lijn tot de andere. Maar de hellingen
„ der lijnen zijn niet gelijkvormig, indien niet beide
„ lijnen bij die plaatsing overeenkomen. Dus *die hoeken*
„ *zijn gelijkvormig, waarvan de zijden overeenkomen; on-*
„ *gelijkvormig, waarvan de zijden niet overeenkomen.*

5. „ Het is derhalve blijkbaar, dat geen kromlijnige
„ hoek

(*t*) Dit is dus ook tegen de bepaling, welke sommigen der hedendaagsche wiskundigen van eenen hoek geven. Men vergelijke bladz. 8.

„ hoek aan eenen regtlijnigen gelijk kan zijn. Want het-
„ geen men gewoonlijk noemt *gelijkheid der hoeken*, *is*
„ *niet anders dan gelijkvormigheid*. Gelijkvormigheid der
„ hoeken is alleen overeenkomst der beenen, welke
„ overeenkomst niet kan plaats hebben, wanneer een
„ kromlijnige hoek op eenen regtlijnigen hoek geplaatst
„ wordt.

6. „ Dewijl dus het geheele wezen van den hoek de
„ helling is van lijnen, welke elkander raken, *kan geen*
„ *hoek een deel van eenen anderen hoek zijn*, dewijl één
„ helling geen deel van eene andere helling is, *noch kan*
„ *een hoek van den anderen afgenomen worden*, want eene
„ helling laat zich van eene andere helling niet wegne-
„ men, enz. Dit alles kan men wel zeggen van de
„ vlakken tusschen de zijden, maar niet van de hellin-
„ gen der zijden, welke hellingen geene grootheden
„ zijn.

7. „ Hieruit besluiten wij, in welk eene beteekenis
„ de woorden, welke de meetkundigen, en voorname-
„ lijk ook EUCLIDES zelf gebruikt, moeten genomen
„ worden, zoo als: *hoeken deelen*, *vergrooten*, *verklei-*
„ *nen*; *een hoek is het dubbele*, *het drievoudige van eenen*
„ *anderen hoek*, en dergelijke. Wij zullen het dus daar-
„ voor houden, dat zij dit niet wezenlijk, maar alleen
„ volgens eene zekere analogie (non proprie sed analogice
„ tantum) aan de hoeken toeschrijven, en dat zij zoo-
„ danig hebben willen spreken, omdat dit gemakkelijker
„ en vaardiger is, en ook geen nadeel heeft, mits dat
„ men bij de regtlijnige hoeken blijft, enz."

Wij zien uit deze redenering, dat het bewijs, het-
welk TACQUET geeft, *dat de hoek geene grootheid*, *maar*

hoe-

hoedanigheid eener grootheid zij, op twee gronden berust.

1. De eerste grond is, omdat, volgens de bepaling van EUCLIDES, *hoek eene helling is. Helling*, zegt TACQUET, *is eene hoedanigheid der grootheid; dus is de hoek insgelijks eene hoedanigheid.*

Zoo als deze grond hier wordt voorgedragen, schijnt hij niet anders te zijn dan het *magister* (EUCLIDES) *dixit*; doch zoodanig een grond is althans in de wiskunde hoogst vreemd, ja ongerijmd. Hoe kan EUCLIDES over de waarheid eener zaak beslissen, welke geheel niet berust op het getuigenis van den eenen of anderen persoon, maar op de menschelijke bewustheid en juiste redenering, en in het algemeen, hoe kan het gezag van iemand iets gelden bij het onderzoek der waarheid van de eerste beginselen der wiskunde.

Dan, hoe dit ook zijn moge, het gezegde van TACQUET: „ *Het komt mij voor, dat de geheele zaak af-* „ *hangt van de bepaling van* EUCLIDES," beteekent niets, indien niet aangetoond wordt, *dat deze bepaling waar, en in de natuur der zaak gegrond zij.* Dit heeft TACQUET niet aangetoond, en gevolgelijk is de eerste grond zonder eenige kracht.

De tweede grond, welken TACQUET bij zijn bewijs gebruikt, is de eenvoudige syllogismus:

„ *Indien een hoek grootte had (si angulus esset quantus),*
„ *dan zou hij of eene lijn, of een vlak, of een ligchaam*
„ *wezen. Maar de hoek is noch eene lijn, noch een vlak,*
„ *noch een ligchaam. Dus heeft hij geene grootte.*"

Maar waaruit blijkt toch de waarheid der stelling, *indien een hoek*, enz., of wat hier hetzelfde is, waaruit

blijkt

blijkt de waarheid der ſtelling: *al hetgeen grootte heeft, is of eene lijn, of een vlak, of een ligchaam.* Deze is immers geheel niet bewezen, noch is daartoe door TACQUET eenige poging gedaan. Voor een axioma kan dezelve toch niet gehouden worden. Hier is dus eene *petitio principii*, die bijzonder ſterk en duidelijk is. Wanneer iemand wilde bewijzen, dat tijd, kracht, gewigt enz., geene grootte heeft, dan zou hij op dezelfde wijze den volgenden ſyllogismus kunnen ſtellen:

Al wat grootte heeft, is of eene lijn, of een vlak, of een ligchaam.

Maar tijd, kracht, gewigt, enz. zijn noch lijnen, noch vlakken, noch ligchamen.

Dus hebben zij geene grootte.

3. Men ziet duidelijk, dat hier bij dit onderzoek alles aankomt op de juiste bepaling: *wat is eene grootheid*, of *wat heeft eene grootte*, en *wat is hoedanigheid van grootheid*, hetgeen TACQUET noemt *modus quantitatis.* Van deze bepaling ziet men niets in het geheele leerboek van TACQUET. De eerſte definitie, welke daarin gegeven wordt, is: *punctum est ſignum in magnitudine individuum*, waarbij dus als bekend veronderſteld wordt het begrip *grootheid* (*magnitudo*). Dit is het begrip van een geſlacht, hetgeen verſchillende ſoorten heeft, en dus was het noodig geweest, hetzelve te bepalen, ten minſte zoodanig een algemeen kenteeken daarvan aan te wijzen, hetwelk in al de ſoorten van het geſlacht gevonden wordt.

Naar mijn oordeel is de volgende bepaling juist:

Eene grootheid (quantum) *is, hetgeen uit gelijkſoortige deelen is zamengeſteld. Men meet dezelve, door te bepalen, hoe*

hoe dikwijls een bepaald gedeelte van eene andere grootheid van dezelfde foort, welke men de eenheid noemt, in dezelve bevat is. Indien de *eenheid* is e, en een m gedeelte dezer eenheid n malen in deze grootheid bevat is, dan is de *grootte* der grootheid (quantitas vel magnitudo quanti) $= \frac{ne}{m}$ (*u*).

Volgens deze bepaling is *hoek eene grootheid, omdat een hoek uit hoeken, en dus uit gelijkfoortige deelen is zamengefteld.* Indien een m gedeelte van eenen regten hoek n malen bevat is in eenen hoek A, dan is de grootte van den hoek A een $\frac{n}{m}$ gedeelte van eenen regten hoek.

Daarenboven, hetgeen van elke grootheid in het algemeen kan gezegd worden, kan ook van den hoek gezegd worden; zoo als: *een hoek kan door eenen hoek gemeten worden; een hoek kan gedeeld en verminderd worden; een hoek is grooter of kleiner dan een ander, of gelijk aan denzelven; twee hoeken kunnen* (ten opzigte van derzelver grootte) *in dezelfde reden tot elkander ftaan, als twee on-*

(*u*) Door *meting* alleen is eene grootheid nog niet bepaald, maar er moet bijkomen eene *aanschouwing der eenheid.* Ik ken daardoor nog niet de grootte van eenen afstand, dat ik weet, dat dezelve honderd *meters* is. Ik moet ook te gelijk den *meter*, ten minste een bepaald gedeelte daarvan, zoo als *eene palm*, gezien of betast hebben. Ik kan wel de eene eenheid door eene andere meten; maar het geheel moet toch berusten op eene eenheid, die ik door mijne zintuigen heb waargenomen, of (gelijk in de wijsbegeerte gezegd wordt) *welke mij door de aanschouwing gegeven is.*

andere hoeken, of ook als twee andere grootheden, zoo als twee lijnen, cirkelbogen, figuren, ligchamen, enz.

4. TACQUET zegt wel, dat dit niet eigenlijk, maar *oneigenlijk, volgens eene zekere analogie*, gezegd wordt; maar deze willekeurige verandering van de beteekenis der woorden geschiedt toch alleen *ten gevalle van eene hypothese, welke door geene gronden gestaafd is.* Wonderbaar is het, om de hoeken, waarvan de beenen op elkander vallen, niet *gelijk* (aequales), maar *gelijkvormig* (similes) te willen noemen, ten einde aan het denkbeeld van grootheid geenen toegang te verschaffen. Ik moet dan ook niet zeggen, wanneer de beenen niet op elkander vallen, de hoeken zijn ongelijk; maar zij zijn *ongelijkvormig.* Maar welk woord zal ik gebruiken, om aan te wijzen, dat de hoek *A* grooter of kleiner dan de hoek *B* zij? Ik zou dan moeten zeggen, „de „hoek *A* is meer of minder ongelijkvormig, dan de „hoek *B*;" en de stelling: indien de hoek *A* grooter is dan *B*, dan is de hoek *B* kleiner dan *A*, zou dus deze zijn: *indien A meer ongelijkvormig is dan B, dan is B minder ongelijkvormig dan A.* Men zou zoodanig (ongerijmd of onverstaanbaar) moeten spreken, wilde men volgens TACQUET *eigenlijk* spreken, en *eigenlijk te spreken* kan toch niet afgekeurd worden.

Daarenboven geeft TACQUET zelf, op bladz. 155, de volgende bepaling van gelijkvormige figuren: *Gelijkvormige figuren (similes figurae), zegt hij, zijn diegenen, welke gelijke hoeken hebben, en waarvan de zijden tegen over deze gelijke hoeken evenredig zijn.*

Dus zijn er, volgens TACQUET, ten minste *twee soorten van gelijkvormigheid, die van hoeken en figuren, en ge-*

vol-

volgelijk moet het geſlachtsbegrip, gelijkvormigheid, ten minſte deze twee ſoorten in zich bevatten. Er had dus zoodanig eene definitie van gelijkvormigheid in het algemeen moeten gegeven worden, welke op beide ſoorten kon toegepast worden. Is dezelve niet mogelijk, dan is voorzeker de eene of de andere van deze definitiën onwaar.

Dat dezelve zeer moeijelijk, en welligt niet mogelijk is, blijkt, dunkt mij, uit het volgende:

Volgens TACQUET is het kenteeken van gelijkvormigheid der hoeken *de overeenkomst der zijden* bij de op elkander plaatſing, en van ongelijkvormigheid *de niet overeenkomst van dezelve.* Maar bij de figuren is het volgens TACQUET geheel anders geſteld. Twee figuren, zoo als twee driehoeken, waarvan de zijden bij de op elkander plaatſing overeenkomen, zijn *volkomen gelijk*, en alleen daarom ook gelijkvormig, *omdat volkomene gelijkheid ook de gelijkvormigheid in zich bevat.* Maar het niet overeenkomen der zijden van twee figuren is geen kenteeken van ongelijkvormigheid, integendeel, wanneer twee figuren bloot gelijkvormig zijn, dan heeft er geene overeenkomst der zijden plaats.

Ik zou dus oordeelen, dat men de overeenkomst der perken van twee meetkundige grootheden voor een kenteeken van *gelijkheid*, en de niet overeenkomst voor een kenteeken van *ongelijkheid* moet houden; terwijl bij deze ongelijkheid *gelijkvormigheid* en *niet gelijkvormigheid* kan plaats hebben.

Volgens het gewone denkbeeld kunnen twee meetkundige voorwerpen, welke gelijkvormig zijn, ook gelijk zijn, dat is, twee meetkundige voorwerpen, welke denzelfden vorm hebben, kunnen ook dezelfde grootte heb-

ben, zoo als, bij voorbeeld, twee regte lijnen, twee cirkelbogen, twee quadraten enz. Maar volgens TACQUET maakt de hoek hiervan eene uitzondering. Volgens hem kunnen twee hoeken wel gelijkvormig of ongelijkvormig, maar nooit gelijk of ongelijk zijn, dat is: zij kunnen wel denzelfden of eenen verschillenden vorm, maar nooit dezelfde of verschillende grootte hebben.

5. Indien de getuigenis en de bepaling van EUCLIDES ter beslissing der zaak, *of de hoek al dan niet eene grootheid zij*, iets kan afdoen, dan zou het nuttig wezen te onderzoeken, *in welk eene beteekenis heeft* EUCLIDES *het woord helling genomen, of als eene grootheid, of als hoedanigheid der grootheid.* Het woord *helling* zelve is daartoe niet voldoende. Men moet dus (gelijk wij ook in het algemeen gewoon zijn te doen, om de definitie, welke een schrijver geeft beter te verstaan) uit hetgeen EUCLIDES in het vervolg van den hoek zegt, opmaken, welke de beteekenis zij van dat woord *helling.* Doen wij dit, dan worden wij volkomen overtuigd, dat EUCLIDES *helling of hoek als eene grootheid beschouwd heeft. Hij spreekt van grootere en kleinere hoeken, van vermeerdering, deeling, meting der hoeken; hij bepaalt de gelijkheid der hoeken, op dezelfe wijze als hij de gelijkheid van regte lijnen, en van driehoeken bepaalt*, namelijk, door dezelve op elkander te plaatsen, enz. Nergens vinden wij eenige blijken, dat hij het eene of andere in eene oneigenlijke beteekenis (slechts analogice) heeft willen nemen.

6. *Kromming*, zegt TACQUET, *is toch geene grootheid, waarom zou dan de helling eene grootheid zijn?* Hierop kan men antwoorden: Indien men kromming *in de meet-*

kun-

kundige beteekenis van het woord neemt, dat is, zoo als dat begrip in de meetkunde gebruikt wordt (en hierover wordt hier alleen gehandeld) dan is *kromming* voorzeker eene grootheid; want *de kromming eener kromme lijn, is een hoek, welken twee naastliggende differentialen dezer kromme lijn, of de tangenten van twee naastliggende punten derzelve, met elkander maken.* Indien de krómming geene grootheid was, hoe zouden dan twee krommingen in de omgekeerde reden van twee grootheden kunnen ſtaan? Op dezelfde wijze wordt dus ook buiging, breking, terugkaatſing in de leer van het licht door hoeken aangewezen. Dus vervalt de geheele redenering, en wordt tot de volgende teruggebragt: *Indien de hoek* (de helling) *eene grootheid was, dan zou de hoek* (de kromming) *ook eene grootheid zijn.*

7. De dwaling van TACQUET is blijkbaar daaruit ontſtaan, dat hij bij eene regte lijn alleen in aanmerking nam *den afſtand der uiteinden*, en niet datgene, hetwelk even zoo wezenlijk daartoe behoort, *de dubbele rigting*, en hij dus *lijn*, en *grootte der lijn* voor hetzelfde hield. De regte lijn wijst, tusſchen twee punten geplaatst, eenen afſtand aan, welken afſtand wij ook noemen *grootte der lijn;* doch welke eigenlijk eene *grootheid* zelve is, waarvan wij de grootte door meting kunnen bepalen. Maar zij wijst ook aan twee rigtingen, welke wij *tegengeſtelde rigtingen* noemen, en dus ook het verſchil van deze rigtingen, hetwelk wij *hoek* noemen. Wij kunnen eene lijn trekken, de loodlijn, welke dien hoek in twee gelijke deelen, dat is in twee *regte hoeken*, verdeelt. Dus eene regte lijn vertoont ons in elk punt eenen hoek, die gelijk is aan twee regte hoeken, en gevolgelijk *twee* groot-

grootheden, *hoek en afſtand.* Twee lijnen, die elkander ontmoeten, en geene deelen zijn van dezelfde regte lijn, vertoonen eenen hoek, die kleiner is dan deze hoek. Deze twee grootheden, *hoek en afſtand*, zijn wezenlijk verſcheiden, maar de eene is niet meer eene grootheid dan de andere. Wil men *hoek* eene eigenſchap noemen, dan moet men ook *afſtand* eene eigenſchap noemen, en *waarvan? Van eene lijn, die slechts zinnelijk die twee grootheden voorſtelt.* Op die wijze zou men ook de begrippen als eigenſchappen kunnen beſchouwen van de woorden, door welke zij aangetoond worden.

Beter zou het zijn te zeggen: *afſtanden* en *hoeken* zijn de betrekkingen van punten tot elkander. Intusſchen is de geheele empiriſche ruimte ook niet anders dan eene betrekking en orde der uitwendige voorwerpen, doch *de verbeelding maakt deze ruimte, en met dezelve datgene, waarop alles, tot de ruimte behoorende, ſteunt, namelijk hoek en afſtand, tot eene grootheid.*

BESLUIT TEN OPZIGTE VAN RIGTING EN HOEKEN.

De vorige aanmerking aangaande den ſtrijd tusſchen CLAVIUS en PELETARIUS, en de wonderbare redenering van TACQUET over dien ſtrijd, zal, geloof ik, volkomen regtvaardigen onze bepalingen van rigting, hoek, kromme lijn en tangenten der kromme lijn, en ik zie niet, wat daartegen met regt zou kunnen ingebragt worden. Ik voeg hierbij nog de volgende ſtellingen, als beſluiten van het vorige.

1.) Dat de voorſtelling van rigting eene grondvoorſtelling, en dus eene eenvoudige oorſpronkelijke zij, dit zal wel door niemand in twijfel getrokken worden. Immers, waaruit zou men toch dezelve kunnen afleiden, en waaruit zou dezelve zamengeſteld zijn? Uit eene lijn kan dezelve toch niet afgeleid worden, want eene lijn is een zinnelijk beeld, niet alleen van eene rigting, maar ook van eene tweede grondvoorſtelling, namelijk, van affland. Dit beeld, dat ons de verbeeldingskracht geeft, moet zelfs

nog door het verſtand, als het ware, gezuiverd en in overeenkomst met die grondvoorſtellingen van afſtand en rigting gebragt worden, zoo als wij bl. 25 aangetoond hebben. Daarom zijn ook al de bepalingen van eene regte lijn, welke eenigzins opmerking verdienen, gegrond, of *op de voorſtelling van afſtand*, zoo als, bij voorbeeld, dat het de kleinſte lijn is tusſchen twee punten, of *op de voorſtelling van rigting*, zoo als: het is die lijn, waarvan alle deelen dezelfde rigting hebben, of welke beſchreven wordt door een punt, dat altijd in dezelfde rigting voortgaat; — of *op beide voorſtellingen*, gelijk diegene is, welke wij daarvan gegeven hebben. Maar het zou ongerijmd zijn, uit die voorſtelling der regte lijn eene bepaling van rigting af te leiden.

2.) Dat voorts de zuivere Meetkunde niet alleen, maar ook de geheele, op beweging toegepaste, Wiskunde niet minder op de voorſtelling van rigting dan op die van afſtand gegrond is, blijkt van zelve, want wat zouden deze wetenſchappen zijn, indien het denkbeeld van rigting en dus ook van hoek werd weggenomen? In de Mechanica wordt de beweging bepaald door de ſnelheid en door de rigting, terwijl tot grondbeginſel of axioma wordt aangenomen: *een ligchaam blijft met dezelfde ſnelheid en in dezelfde rigting voortgaan, welke hetzelve heeft,*

in-

indien er niet eene oorzaak of kracht is, door welke deze rigting en ſnelheid veranderd wordt.

Deze grondſtelling is niet op ervaring gegrond, maar is eene ſtelling a priori, gelijkſtaande met diegene, *elke verandering heeft eene oorzaak.*

3). Omdat dus de voorſtelling van rigting eenvoudig, en eene grondvoorſtelling is, kan daarvan geene bepaling gegeven worden (zie bladz. 14 en volg.). Elke bepaling daarvan loopt in eenen cirkel rond. Wanneer ik zeg: *Rigting is eene zekere betrekking tuſſchen twee punten*, dan is dit niet voldoende, tenzij ik aanwijze, welke die betrekking zij, doch dit kan ik niet doen, juist omdat dezelve oorſpronkelijk is. Hetzelfde geldt ook van de voorſtelling van afſtand. Het zou ongerijmd zijn te zeggen: *afſtand is hetwelk uit deelen beſtaat*, want dan vraagt men, welke zijn de deelen? *Afſtanden.* Dus zou de bepaling zijn: *Afſtand is hetwelk uit afſtanden beſtaat.* Of indien men deze bepaling gaf, *afſtand is de lengte eener regte lijn*, zou men vragen, wat is lengte? *Afſtand.* Wat is eene regte lijn? Die den afſtand en de rigting aanwijst van twee punten; en deze afſtand wordt genoemd *lengte der lijn.* Bij elke bepaling van rigting en afſtand geraken wij onvermijdelijk in zoodanig eenen cirkel.

4.) Wij kunnen evenwel de twee voorſtellingen

met elkander vergelijken, voor zoo verre beide namelijk eene betrekking aanwijzen van twee punten, en door eene regte lijn, tusſchen die twee punten getrokken, aangetoond en verzinnelijkt worden.

a.) De afſtand van het punt *A* tot het punt *B* is dezelfde als de afſtand van het punt *B* tot het punt *A*. Dit kan niet van de rigting gezegd worden. Dus toont de regte lijn tusſchen twee punten geplaatst *éénen afſtand* aan en *twee verſchillende rigtingen.*

b.) Dewijl de lijn, die *A* en *B* vereenigt, tevens andere punten vereenigt, en dus de afſtanden van elk paar dezer punten aanwijst, en elk van deze afſtanden kleiner is, dan die van *A* tot *B*, kunnen wij zeggen, *dat de afſtand grooter en kleiner kan zijn of worden*. Dit geldt niet van de rigting; de lijn *A B*, hoe ook verlengd, toont ſlechts twee rigtingen aan, welke dezelfde zijn voor elk paar punten, in die lijn gelegen. De rigting zelve kan noch grooter noch kleiner zijn, of worden; en in het algemeen kan aan de rigting geene grootte toegeſchreven worden — *omdat zij geen afſtand is.*

c.) De lijn, voor zoo verre zij eenen bepaalden afſtand aanwijst, is *bepaald* door de twee punten, waarvan zij den afſtand aanwijst, en is *deelbaar*. Voor

zoo

zoo verre zij de twee rigtingen aanwijst is zij *oneindig*, en moet als zoodanig gedacht worden — en is *ondeelbaar*.

d.) *Rigting* op zich zelve is dus geene grootheid, maar wel is het verſchil van twee rigtingen, of de hoek, welken twee lijnen met elkander maken, *eene grootheid;* want dit verſchil kan grooter en kan kleiner zijn, en een hoek is even zoowel uit hoeken zamengeſteld, als een afſtand uit afſtanden (zie hierover nader bl. 145 en volg.). Wanneer men hierop mogt aanmerken, dat, daar rigting geene grootheid is, ook het *verſchil* van twee rigtingen geene grootheid zijn kan, zou het antwoord dit zijn: Het woord *verſchil* heeft hier niet dezelfde beteekenis als bij *afſtand*, (want verſchil van afſtand is, hetgeen er overblijft, indien de kleine afſtand van den grooten wordt afgetrokken), maar het beteekent veeleer de *afwijking* eener rigting van eene andere, en deze afwijking is de hoek, welken de twee lijnen, die twee rigtingen aanwijzen, met elkander maken. Dus deze aanmerking bewijst alleen, dat verſchil van rigting of hoek niet dezelfde ſoort van grootheid is, als verſchil van afſtanden, of verſchil van zoodanige grootheden, welke afhangen van den afſtand, en daardoor bepaald worden, zoo als grootheid van lijnen, figuren, ligchamen. En dit ſtemmen wij gereedelijk toe, en volgt ook uit hetgeen wij gezegd hebben.

Ove-

Overigens zijn in onze taal de uitdrukkingen, *verſchillende rigtingen*, *een groot*, *aanmerkelijk*, *klein en gering verſchil van rigting* en dergelijke zeer gebruikelijk en verſtaanbaar. Wij hebben dus geene zwarigheid gemaakt, om het woord *verſchil* in plaats van afwijking van rigting te gebruiken, te meer, daar hetzelve nooit tot dubbelzinnigheid kan aanleiding geven, en wij in het volgende het woord *afwijking* niet geheel in dezelfde beteekenis genomen hebben.

e.) Gelijk als de plaats van een punt niet bepaald is, indien dezelve niet met de plaats van andere punten, die ten grondſlage liggen, vergeleken wordt, of indien de afſtand van dat punt van drie op elkander loodregt ſtaande lijnen of vlakken niet aangewezen is, en gelijk dus de voorſtelling van plaats bloot eene betrekkelijke voorſtelling is, zoo is het ook met de rigting gelegen. Eene rigting is niet bepaald, indien hare afwijking van eene andere rigting, welke de *oorſpronkelijke* (fundamentale) rigting kan genoemd worden, niet bekend is. Bij de kromme lijnen, gelijk wij gezien hebben, is zulks de rigting der as, waarmede de rigtingen der kromme lijn in de verſchillende punten vergeleken worden. Om de rigting eener horizontale lijn te bepalen, gebruiken wij voor de oorſpronkelijke rigting de rigting van de *middaglijn*, of van de lijn, welke het *Noord-* en *Zuidpunt* in

in den Horizon met elkander vereenigt of ook de rigting der horizontale lijn, welke het *Oost* en *Westpunt* vereenigt, en welke lijn op de middaglijn loodregt ſtaat. Indien eene lijn eenen ſcherpen hoek met den Horizon maakt, hebben wij ter bepaling van hare rigting twee hoeken noodig, den hoek, welken zij met den Horizon maakt, en den hoek, welken hare horizontale projectie met de middaglijn vormt. Den eerſten hoek noemt men ook *de hoogte*, en den tweeden hoek het *azimuth* van een voorwerp, dat zich in die lijn bevindt.

Nemen wij het woord *bepaalde rigting* in deze beteekenis, namelijk, dat dezelve is de afwijking derzelve van eene oorſpronkelijke rigting, dan is rigting eene grootheid.

Intusſchen, daar in de zuivere Meetkunde ſlechts de hoeken, welke twee lijnen met elkander maken, in aanmerking komen, heeft men deze oorſpronkelijke rigting aldaar niet noodig.

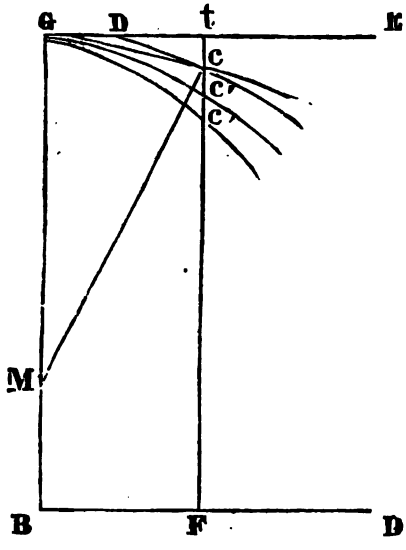
De Hoogleeraar en beroemde Wijsgeer J. F. FRIES beſchouwt ook (in zijn belangrijk werk: *Die Mathematiſche Naturphiloſophie* 1822), den hoek *als het verſchil van twee rigtingen*. Gaarne beken ik, dat de denkbeelden van dezen achtingwaardigen geleerden mij veel licht in deze zaak gegeven hebben.

GRUNERT (KLÜGELS *Lexicon*, bij het woord *Winkel*) geeft ook deze verklaring van eenen hoek, *dat dezelve het verſchil is van de afwijking der lijnen van elkander*.

46.

AFWIJKING VAN EENEN BOOG VAN DE REGTE LIJN, BEPAALD DOOR DE RIGTINGEN.

Fig. 20.



Wanneer men aan de beide uiteinden (*G* en *C*) van eenen boog (*G C*) tangenten trekt (*G E* en *D C*), zal de hoek (*C D E*) dezer tangenten het verschil der rigtingen aanwijzen, welke de kromme lijn in het begin

gin en op het einde van den boog heeft. Men kan dit noemen: *de afwijking van den boog van de regte lijn, bepaald door de rigtingen.* Deze afwijking of deze hoek der tangenten DE en DC is gelijk aan den hoek (GMC), *welken de normalen van het begin- en eindpunt van den boog met elkander maken.* (Men vergelijke p. 114. 6).

GEVOLG.

Bij verschillende cirkels is deze afwijking in de regte reden van de lengte der bogen, en de omgekeerde reden van de radiën der cirkels. Zijn derhalve de lengten der bogen gelijk, dan is de afwijking in de omgekeerde reden der radiën. Bij denzelfden cirkel, of bij gelijke cirkels zijn dus overal deze afwijkingen dezelfde, indien de bogen gelijk zijn. Dit is eene eigenschap, welke alleen bij den cirkel gevonden wordt, welke op de *gelijkvormigheid der cirkelbogen* berust.

47.

KROMMING EENER LIJN IN DERZELVER VERSCHILLENDE PUNTEN.

De gemelde afwijking intusschen is zamengesteld uit verschillende afwijkingen, en hangt af van de leng-

lengte van den boog, en kan grooter, maar ook kleiner worden, indien de boog verlengd wordt. Die enkelvoudige afwijking dus, waarop de lengte van den boog geenen invloed heeft, *is de hoek, welken twee naastliggende differentialen eener kromme lijn met elkander maken;* welke hoek, met uitzondering van den cirkel, voor de verſchillende punten eener kromme lijn verſcheiden is. Dit is, gelijk wij (bl. 130) gezien hebben, *de kromming der lijn voor een bepaald punt.*

GEVOLG.

Dewijl eene cirkellijn in al derzelver punten dezelfde kromming heeft, en de krommingen van verſchillende cirkels in de omgekeerde reden zijn van de radiën (bl. 159) maakt men daarvan gebruik, om de verſchillende krommingen van eene of meerdere kromme lijnen te bepalen en met elkander te vergelijken. Men zoekt door middel der differentiaal-rekening het middelpunt van den *krommingcirkel*, dat is van dien cirkel, welke door drie naastliggende punten eener kromme lijn gaat. De radiën van dezen cirkel, genoemd *kromteſtralen*, gaan dus in de rigting der twee naastliggende normalen, en de hoek, welken zij maken, is de *kromming der lijn.* Deze cirkel is van alle cirkels diegene, welke met de kromme lijn in dat punt het meest overeenkomt, of in aanraking is. Hieruit volgt dan, *dat de krommingen eener lijn in derzelver verſchillende punten tot elkan*

kander ſtaan in de omgekeerde reden der ſtralen van de krommingcirkels voor die verſchillende punten.

48.

AFWIJKING VAN DEN BOOG VAN EENE REGTE LIJN, BEPAALD DOOR DEN AFSTAND.

Wij kunnen intusſchen ook de afwijking van den boog van de regte lijn bepalen door den afſtand, welken het uiteinde van den boog heeft van die tangens, welke door het beginpunt is getrokken. Indien dus GE de tangens is van het punt G en Ct loodregt ſtaat op GE, dan is Ct deze afwijking voor den boog Gc. Men kan dezelve noemen: *afwijking van den boog van de regte lijn, bepaald door den afſtand.* Indien de tangens (GE) de as is, dan is deze afwijking de ordinate der kromme lijn voor het eindpunt C van den boog. Op deze wijze kunnen ook de afwijkingen der bogen van verſchillende kromme lijnen met elkander vergeleken worden, welke in het punt G de gemeenſchappelijke tangens GE hebben, en waarvan de eindpunten zijn in de lijn tF, loodregt op GE getrokken. *In dit geval zijn de afwijkingen gelijk de ordinaten dezer eindpunten.* Laat G het beginpunt der abscisſen, GC de boog van eenen cirkel en GC' de boog

van eene parabel zijn, dan is de afwijking van den cirkelboog tot die van de parabel $= V(px) : V(2rx - xx)$ of $V(p) : V(2r - x)$, zijnde Gt de abscis x.

GEVOLG 1.

Deze afwijking is bij eene cirkellijn overal gelijk, indien de bogen gelijk zijn. Deze eigenschap vinden wij wederom alleen bij den cirkel.

GEVOLG 2.

Indien GC en GC' twee bogen van verschillende cirkels zijn, kleiner dan 90°, dan is Ct kleiner dan $C't$, indien de radius van GC grooter is dan die van GC'. Indien dus meerdere cirkels eene gemeenschappelijke tangens GE hebben, dan zal die cirkel, welke den grootsten radius heeft, het minst van de tangens afwijken. Tusschen de tangenten en den boog GC kunnen dus oneindig vele bogen gaan van cirkels, waarvan de radius grooter is dan die van dezen boog GC. Deze afwijking is dus eene veranderlijke grootheid, indien de radius zulks is, en kan, gelijk elke lijn, in een onbepaald getal van deelen gedeeld zijn. De uitdrukking: *eene regte lijn is eene cirkellijn met eenen oneindigen radius* (welke dus daarop loodregt staat) *beschreven*, is, letterlijk genomen, *ongerijmd*, doch hare beteekenis is, *dat een bepaalde cirkelboog des te minder van de tangens afwijkt, hoe grooter de radius is.*

49.

ONDERLINGE AANRAKING DER KROMME LIJNEN, EN VERSCHILLENDE GRADEN DEZER AANRAKING.

Het aangehaalde geleidt ons nader tot het begrip van verſchillende graden van onderlinge aanraking der kromme lijnen.

Indien meerdere kromme lijnen een gemeenſchappelijk punt G hebben, en eene gemeenſchappelijke tangens $G E$ van dat punt, en uit een punt s der tangens, dat zich op eenen zeer kleinen afſtand van het gemeenſchappelijk punt bevindt (welke afſtand zoo klein, als noodig is, moet genomen worden) eene loodlijn $s F$ op de tangens getrokken wordt, welke deze kromme lijnen ſnijdt, dan zullen de afſtanden dezer ſnijpunten de graden van aanraking bepalen der kromme lijnen, tot welke deze ſnijpunten behooren; zoodat de lijn A eenen grooteren graad van aanraking heeft met de lijn B, dan met de lijn C, indien haar ſnijpunt nader is bij het ſnijpunt van B, dan bij het ſnijpunt van C. Dus zal $G C$ (fig. 18) meer in aanraking zijn met $G C'$, dan met $G C''$, omdat $C' C$ kleiner is dan $C' C''$, en indien $C' C$ kleiner is dan $C' C''$, zal de lijn $G C'$ nader in aanraking zijn met de lijn $G C'$ dan met de lijn $G C''$.

Gelijkvormigheid van meetkundige grootheden is, gelijk de naam zelve aanwijst, *gelijkheid van vorm.* Alle vorm intusschen berust, volgens onze beschouwing, alleen *op rigting* en gelijkvormigheid moet dus daaruit alleen afgeleid worden. *Twee meetkundige grootheden zijn derhalve gelijkvormig, indien de lijnen of vlakken van de eene, dezelfde rigting hebben als de lijnen of vlakken van de andere, in dezelfde volgorde genomen.* Dewijl intusschen aan eene meetkundige grootheid eene beweging kan gegeven worden, waardoor wel de vollstrekte, maar niet de betrekkelijke rigting van hare lijnen en vlakken veranderd wordt, en de vorm dus hierbij onveranderd blijft, kunnen wij de volgende bepaling geven.

Twee meetkundige grootheden zijn gelijkvormig, wanneer de eene zoodanig, in de voorstelling, kan geplaatst worden, dat derzelver lijnen of vlakken, dezelfde, of gelijke rigting hebben, als de deelen en vlakken der andere grootheid, in dezelfde volgorde genomen. De lijnen hebben, gelijk uit het voorgaande blijkt, dezelfde, of eene gelijke rigting, wanneer zij op elkander vallen, of evenwijdig zijn. Hetzelfde geldt ook van de vlakken, gelijk wij in de volgende afdeeling zullen zien.

Hieruit volgt van zelve, dat geene ongelijksoortige grootheden aan elkander kunnen gelijkvormig zijn, en dat dus de eerste voorwaarde der gelijkvormigheid van twee meetkundige grootheden is, *dat dezelve*

ge-

gelijkſoortig zijn. Geen veelhoek kan gelijkvormig zijn met eenen anderen veelhoek, indien zij niet hetzelfde getal van zijden hebben. Geen platvlakkig ligchaam kan met een ander gelijkvormig zijn, indien zij niet door een gelijk getal van gelijkſoortige figuren ingeſloten zijn.

Aanmerking. Wij hebben getracht eene bepaling van gelijkvormigheid te geven, welke op alle ſoorten van meetkundige grootheden kon toegepast worden en waaruit dus de bepaling der gelijkvormigheid van deze verſchillende ſoorten kan afgeleid worden. Hierdoor ontſtaan er voorzeker bij die verſchillende ſoorten der grootheden meer voorwaarden van gelijkvormigheid, dan er noodig zijn, indien men namelijk die voorwaarden als onnoodig beſchouwt, welke reeds uit de aangenomene volgen. Bij eene bepaling zoo als deze, die zich tot een geheel geſlacht uitſtrekt, is het niet mogelijk zulks te vermijden, en *ook niet noodig*, vermits toch door de beſchouwing der verſchillende meetkundige grootheden blijkt, welke voorwaarden uit andere voorwaarden volgen. Het is hiermede gelegen, als met de volkomene gelijkheid der meetkundige grootheden. *Twee regtlijnige platvlakkige figuren, (veelhoeken) en dus ook twee regtlijnige driehoeken, zijn volkomen gelijk, indien de inhouden, en de overeenkomſtige hoeken en zijden van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen*, dit is eene juiste bepaling, hoewel na-

derhand uit de beſchouwing der driehoeken blijkt, dat bij voorbeeld uit de gelijkheid der zijden de gelijkheid der hoeken, en der inhouden van zelve volgt.

Overeenkomſtig met deze algemeene bepaling der gelijkvormigheid van twee meetkundige grootheden, moeten dus ook de bepalingen der gelijkvormigheid voor de verſchillende ſoorten van meetkundige grootheden zijn. Deze overeenkomst ziet men bij de volgende bepalingen der gelijkvormigheid van meetkundige grootheden, waarvan al de deelen in hetzelfde vlak zijn. In de volgende afdeeling zullen wij zien, dat ook hiermede overeenkomen de bepalingen der gelijkvormigheid van ligchamen en van meetkundige grootheden, waarvan de deelen in verſchillende vlakken zijn.

52.

GELIJKVORMIGHEID DER REGTE LIJNEN.

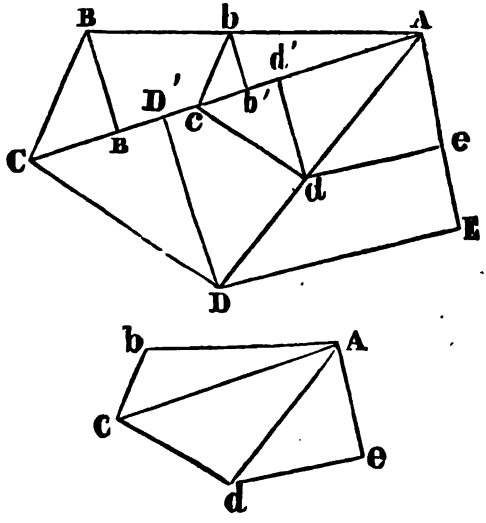
Als een onmiddelijk gevolg uit de algemeene bepaling van gelijkvormigheid, moeten wij beſchouwen de ſtelling, *dat alle regte lijnen aan elkander gelijkvormig zijn*, omdat zij zoodanig kunnen geplaatst worden, dat zij op elkander vallen, of dat zij evenwijdig zijn. In het eerſte geval wijzen zij aan dezelfde rigting, en in het tweede geval eene gelijke rigting.

53.

GELIJKVORMIGHEID VAN GEBROKENE LIJNEN.

Twee gebrokene lijnen, (§ 33) *waarvan de deelen in hetzelfde vlak liggen, zijn gelijkvormig, wanneer de eene zoodanig kan geplaatst worden, dat derzelver zamenſtellende lijnen of evenwijdig zijn, met die van de andere, in dezelfde volgorde genomen, of op dezelve vallen.*

Fig. 21.



Dus zijn de twee gebrokene lijnen *A B C D E A* en *A b c d e A*, (fig. 21) waarvan de eerſte de groot-

 ſte

ſte is, gelijkvormig aan elkander, indien de veelhoek *AbcdeA* zoodanig in den veelhoek *ABCDEA* geplaatst kan worden, dat *Ab* op *AB* en *Ae* op *AE* valt, en voorts *BC* met *bc*, *CD* met *cd*, en *DE* met *de* evenwijdig zijn.

54.

GELIJKVORMIGHEID VAN REGTLIJNIGE PLATTE FIGUREN.

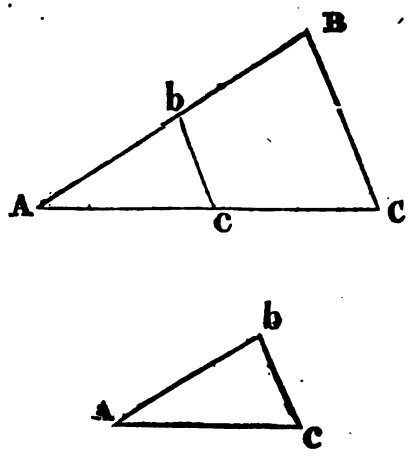
Twee regtlijnige platte figuren zijn gelijkvormig, indien de twee gebrokene lijnen, welke derzelver omtrekken zijn, gelijkvormig aan elkander zijn. Dus zijn de vijfhoeken *ABCDEA* en *AbcdeA*, (fig. 21) gelijkvormig, indien de gebrokene lijnen *ABCDEA* en *AbcdeA* gelijkvormig zijn.

55.

1e GEVOLG.

GELIJKVORMIGHEID VAN REGTLIJNIGE DRIEHOEKEN.

Fig. 22.



Hieruit volgt, dat voor de regtlijnige driehoeken ook de volgende bepaling geldt. *De omtrekken van twee regtlijnige driehoeken, en dus ook de driehoeken A B C en A b c zelven, zijn gelijkvormig, indien zij twee gelijke hoeken hebben,* (zoo als $A = A$ en $C = c$) *en dus gelijkhoekig zijn.*

In

In dit geval, namelijk, kan de driehoek Abc zoodanig op den driehoek ABC geplaatst worden, dat zijne zijde dezelfde of gelijke rigtingen hebben, als de zijden van den driehoek ABC. Plaatst men namelijk A op A en Ac op AC, dan valt Ab op AB, omdat $A = C$, voorts is bc evenwijdig met BC, omdat $G = c$.

56.

2 GEVOLG.

EVENREDIGHEID DER ZIJDEN.

Gewigtig is hier het verband der gelijkvormigheid van twee driehoeken, met de evenredigheid der zijden, die tegenover de gelijke hoeken ſtaan. De meetkunde leert ons hieromtrent:

a. *De gelijkvormigheid van twee driehoeken volgt uit de evenredigheid der zijden, en omgekeerd, deze evenredigheid volgt uit de gelijkvormigheid,* dat is: twee driehoeken, die gelijke hoeken hebben, hebben evenredige zijden, en diegenen, welke evenredige zijden hebben, hebben gelijke hoeken. Dewijl dus de evenredigheid der zijden uit de gelijkheid der tegenoverſtaande hoeken volgt, is het reeds daarom onjuist, deze bepaling te geven: *Driehoeken zijn gelijkvormig, indien de hoeken gelijk zijn, en de tegenoverſtaan-*

ſtaande zijden evenredig zijn, dewijl de tweede eigenſchap een noodzakelijk gevolg is van de eerſte.

b. Twee driehoeken zijn gelijkvormig, indien dezelve eenen gelijken hoek hebben, en om dien gelijken hoek, evenredige zijden.

c. Ook zijn dezelve gelijkvormig, indien zij eenen gelijken hoek hebben, en om eenen anderen hoek evenredige zijden, mits de driehoeken van dezelfde ſoort, dat is beide regthoekig, of ſtomphoekig, of ſcherphoekig zijn.

57.

3 GEVOLG.

GELIJKVORMIGHEID DER VEELHOEKEN.

Wij kunnen ook de volgende bepaling van gelijkvormige veelhoeken geven:

De omtrekken van twee platte regtlijnige figuren, en dus die figuren zelve, zijn gelijkvormig, wanneer de diagonalen, uit een der hoekpunten naar de overige hoekpunten getrokken, met de zijden hoeken maken, welke in de eene figuur gelijk zijn aan die van de andere figuur, indien namelijk de hoekpunten en zijden in dezelfde volgorde genomen zijn. Dus zijn, bij voorbeeld, de figuren *ABCDE en AbcdeA* (fig.

(fig. 21) gelijkvormig, indien $\angle CAB = \angle cAb$; $\angle BCA = \angle bcA$, $\angle DAB = \angle dAb$, $\angle ADC = \angle Adc$; $\angle DAE = \angle dAe$; $\angle ADE = \angle Ade$.

Men plaatst namelijk $\triangle Abc$ op $\triangle ABC$, zoodat A op A valt, b op de lijn AB en c op de lijn AC, hetwelk geschieden kan, omdat $\angle ABC = \angle bAc$. Voorts is $\angle bcA = \angle BCA$, dus bc is evenwijdig met BC. Dewijl $\angle DAB = \angle dAb$ en $\angle CAB = \angle cAb$, is ook $\angle DAC = \angle dAc$; ook zal het punt d op AD vallen, en omdat $\angle CDA = \angle cdA$, is ook cd evenwijdig met CD.

Het punt e valt op AE, omdat $\angle DAE = \angle dAe$; maar $\angle ADE = \angle Ade$; dus DE is evenwijdig met de. Dus is de vijfhoek $Abcde A$ zoodanig op den vijfhoek $ABCDEA$ geplaatst, dat deszelfs zijden gelijke rigting hebben met de overeenkomstige zijden van den vijfhoek $ABCDEA$. Men ziet, dat hetzelfde op dezelfde wijze van alle regtlijnige platte figuren of veelhoeken bewezen kan worden. Dus volgt deze bepaling uit de algemeene.

58.

4 GEVOLG.

Uit deze bepaling van gelijkvormigheid der veelhoeken volgt ook:

Indien de omtrekken van twee veelhoeken gelijk-

vor-

vormig zijn, dan zijn de hoeken, door de overeenkomſtige zijden gevormd, gelijk, en de zijden zelve zijn evenredig; dat is: $\angle ABC = \angle Abc$; $\angle BCD = \angle bcd$; $\angle CDE = \angle cde$; $\angle DEA = \angle deA$; $\angle BAE = \angle bAe$; en $AB : Ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : eA$; en omgekeerd, *indien deze gelijkheid der hoeken en evenredigheid der zijden plaats heeft, dan zijn de omtrekken, en dus de veelhoeken, gelijkvormig.*

Dus uit onze bepaling volgt de gewone bepaling der gelijkvormigheid van regtlijnige platte figuren, welke daarin gebrekkig is, *dat zij datgene tevens bevat, wat reeds noodzakelijk uit de gelijkheid der hoeken, waarin alle gelijkvormigheid gegrond is, volgt, en dat zij een vreemd denkbeeld, dat van evenredigheid der zijden, in de oorſpronkelijke voorſtelling van gelijkvormigheid brengt.*

Aanmerking. KLÜGEL (*) gaat nog verder en rekent tot de gelijkvormigheid de volgende drie kenteekens:

a. Gelijke ligging van de regte lijnen en vlakken, waardoor de meetkundige grootheden bepaald worden, of, indien het kromme lijnen en vlakken zijn, gelijke ligging van derzelver kleinſte deelen.

a.

(*) Lexicon bij het woord *Aehnlichkeit.*

a. Evenredigheid der overeenkomſtige lijnen, vlakken en ligchamelijke deelen.

c. Gelijkſoortige zamenſtelling van alle enkele deelen of van diegenen, door welke het voorwerp bepaald wordt.

In eene juiste bepaling van een voorwerp moeten niet die kenteekens voorkomen, welke reeds uit de opgenoemde volgen. De eerſte voorwaarde is voldoende, omdat daaruit de twee overige volgen.

59.

5. GEVOLG.

De overeenkomſtige, door de diagonalen gevormde, driehoeken van twee gelijkvormige veelhoeken, zijn gelijkvormig; en omgekeerd, indien deze driehoeken gelijkvormig zijn, dan zijn de veelhoeken gelijkvormig. Wij kunnen dus ook zeggen, *dat twee regtlijnige platte figuren van een gelijk getal zijden gelijkvormig zijn, indien derzelver deelen, namelijk, de overeenkomſtige driehoeken gelijke hoeken hebben.*

Men trekke uit twee overeenkomſtige hoekpunten A en A van twee veelhoeken $ABCDE$ en $Abcde$ (fig. 21) de diagonalen AC, AD, Ac, Ad. *Indien dan de gelijkſtandige hoeken, welke deze diagonalen* met een der zijden, zoo als met AB en Ab *vormen, alsmede de gelijkſtandige hoeken der zijden*

in

in beide veelhoeken gelijk zijn, dan zijn de veelhoeken gelijkvormig. Want in dit geval zijn de driehoeken van de eenen veelhoek gelijkhoekig met die van den anderen.

60.

6. GEVOLG.

BETREKKING DER ABSCISSEN EN COÖRDINATEN VAN DE OVEREENKOMSTIGE HOEKPUNTEN VAN GELIJKVORMIGE GEBROKENE LIJNEN EN GELIJKVORMIGE VEELHOEKEN.

Men late (fig. 21 bl. 169.) uit de punten b, d, B, D, enz. loodlijnen bb', dd', BB', DD', neder op de Diagonalen Ac en AC, (of wanneer de veelhoeken in elkander geplaatst zijn, op de Diagonaal AC) dan is:

$Ab : AB = Ad : AD = Ab' : AB' = Ad' : AD' = bb' : BB' = dd' : DD'$, enz.

Dat is: *indien twee gebrokene lijnen of veelhoeken gelijkvormig zijn, en twee overeenkomstige diagonalen tot assen, en een van derzelver uiteinde tot beginpunt der abscissen worden aangenomen, dan zullen de abscissen zoowel als de ordinaten der overeenkomstige hoekpunten in dezelfde standvastige rede zijn*, dus, indien de coördinaten van twee overeenkomstige

hoekpunten, zoo als B en b, zijn x, y en x', y' dan is $m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ waar m een ſtandvastig getal is.

Omgekeerd, indien voor alle overeenkomſtige hoekpunten is $m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$, dan zijn de gebrokene lijnen, en de veelhoeken gelijkvormig.

Stel namelijk fig. 21, AC de as en A het beginpunt der abſciſſen, x en y de coördinaten van het punt B; X en Y die van het punt D; x' en y' die van het punt b en X' en Y' die van punt d,

dan is $AB' = x$, $BB' = y$

$AD = X$, $DD' = Y$

$Ab' = x'$, $bb' = y'$

$Ad' = X'$, $dd' = Y'$

dus is $x : x' = y : y' = X : X' = Y : Y'$

61.

GELIJKVORMIGHEID DER KROMME LIJNEN, WAARVAN AL DE DEELEN IN HETZELFDE VLAK ZIJN.

Dewijl hetgeen, bij N°. 60, aangewezen is, algemeen waar is, hoe groot ook het getal der hoekpunten van twee gelijkvormige gebrokene lijnen of veelhoeken zijn moge, geldt hetzelve ook voor krom-

kromme lijnen, en blijkt hieruit de waarheid van de volgende bepaling:

Twee kromme lijnen, waarvan al de deelen in hetzelfde vlak zijn, zijn gelijkvormig, indien de abscisſen zoowel als de ordinaten van twee overeenkomſtige hoekpunten, naar welgevallen genomen, in dezelfde ſtandvastige rede zijn. Overeenkomſtige punten zijn, waarvan de abſcisſen x en x' in eene ſtandvastige rede zijn, zoodat $x' = mx$. Indien dus de coördinaten dezer twee hoekpunten zijn: x, y en x', y', alsdan is

$m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$, waar m een ſtandvastig en eindig getal is. De asſen moeten dus zoodanig genomen worden, dat, wanneer $x = 0$ is, ook $x' = 0$ zij, en indien $y' = 0$, ook $y = 0$ zij.

62.

AANMERKING.

Men kan ook de volgende bepaling geven. *Twee kromme lijnen zijn gelijkvormig, wanneer derzelver plaatſing zoodanig kan zijn, dat de differentiaallijnen bij de overeenkomſtige punten evenwijdig zijn.*

Want omdat de differentiaallijnen evenwijdig zijn, maken de tangenten der overeenkomſtige punten gelijke hoeken met de as, dus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}$; maar dewijl de punten overeenkomſtig zijn, is $x' = mx$,

dus $\delta x' = m \delta x$, dus $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{m \delta x}$, of $m \delta y = \delta y'$ dus $y' = my$, dus $m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$.

63.

GEVOLG I.

Men ſtel, dat de kromme lijnen van den tweeden graad zijn, en dat de vergelijking van de eerſte zij, $y^2 = px + qx^2$ en van de tweede $y'^2 = p'x' + q'x'^2$. Dewijl uit hoofde der gelijkvormigheid $x' = mx$ en $y' = my$ is, wordt de laatſte vergelijking veranderd in $m^2 y^2 = mp'x + q'm^2x^2 = m^2(px + qx^2)$, dus $p'x + q'mx^2 = pmx + mqx^2$. Deze vergelijking kan niet plaats hebben, indien niet $p' = mp$ en $q = q'$, waaruit volgt:

a. Alle gewone of Appolloniſche parabels zijn gelijkvormig, omdat $q = q' = 0$. Hier is $m = \frac{p'}{p} = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x'}$, dat is: *de abſciſſen en ordinaten der overeenkomſtige punten ſtaan tot elkander als de parameters.*

b. Alle cirkels zijn gelijkvormig, omdat $q = q' = -1$. Hier is $p = 2r$ en $m = \frac{r'}{r} = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$ dat is, *de abſciſſen en ordinaten der overeenkomſtige punten ſtaan tot elkander als de radiën.*

c. Alle ellipſen en alle hyperbels zijn gelijkvormig, indien de rede tusſchen de groote en kleine

as

as dezelfde is. Laat de groote en kleine as van de eene ellips of hyperbel zijn a' en b', en van de andere a en b, dan zal er gelijkvormigheid zijn, indien $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, want in dit geval is $q = q'$. Hier is $m = \frac{a'}{a} = \frac{x'}{x} = \frac{b'}{b} = \frac{y'}{y}$, dat is: *de abſciſſen en ordinaten der overeenkomſtige punten ſtaan tot elkander, als de groote of als de kleine aſſen.*

d. Geene ellipſen of hyperbels zijn gelijkvormig, indien de rede tuſſchen de groote en kleine as niet dezelfde is.

64.

GEVOLG 2.

Uit het voorgaande kunnen wij in het algemeen beſluiten.

1. *Alle kromme lijnen van dezelfde ſoort zijn gelijkvormig, indien in derzelver vergelijking ſlechts één onveranderlijke grootheid voorkomt;* zoo als de parabels en cirkels; zoo ook de *ciſſoiden, cardioiden*, waarvan de vergelijkingen zijn: $x^3 = (a-x)\,y^2$; en $y^4 = (a^2 + 2\,a\,x - 2x^2)\,y^2 + 2\,a\,x^3 - x^4$; zoo ook de *cycloiden*, waarvan de betrekking der coördinaten bepaald wordt door de vergelijkingen $x = a\,(\phi - Sin\,\phi)$ en $y = a\,(1 - Cos.\,\phi)$, welke dus alleen verſchillen ten opzigte van den radius van den makenden cirkel.

2. *Kromme lijnen van dezelfde ſoort, in welker vergelijkingen twee en meer onveranderlijke grootheden voorkomen, zijn ſlechts in bijzondere gevallen gelijkvormig*, zoo als twee ellipſen of hyperbels, indien $q = q'$ of de betrekking tusſchen de groote en kleine as dezelfde is. Zoo ook twee *conchoiden*, waarvan de vergelijkingen zijn $a^2 = \frac{x^2 y^2}{(b+y)^2} + y^2$, en $a'^2 = \frac{x'^2 y'^2}{(b'+y')^2} + y'^2$. Deze zijn dan alleen gelijkvormig, indien $a' = m a$ en $b' = m b$. Want indien wij ſtellen $x' = m x$ en $y' = m y$ vinden wij

$$\frac{x'^2 y'^2}{m^4} = x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(b+y)^2$$

$$= \frac{(a'^2 - y'^2)(b'+y')^2}{m^4}$$

dus $(a^2 - y^2)(b+y)^2 = \left(\frac{a'^2}{m^2} - y^2\right)\left(\frac{b'}{m} + y\right)^2$.

Dus moet zijn $a' = m a$ en $b' = m b$.

Aanmerking. EULER (*) onderſcheidt *lineae curvae ſimiles et affines*. *Lineae ſimiles* zijn diegenen, welke wij gelijkvormige genoemd hebben, en bij welke $m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$. *Lineae affines, of vermaagſchapte lijnen*, noemt EULER diegenen, bij welke

x'

(*) *Introductio in Analysin infinitorum*, T. II, p. 236.

$x' = mx$ en $y' = ny$, en waar dus wel de ordinaten in eene ſtandvastige rede zijn; maar niet in dezelfde rede, als de abſciſſen.

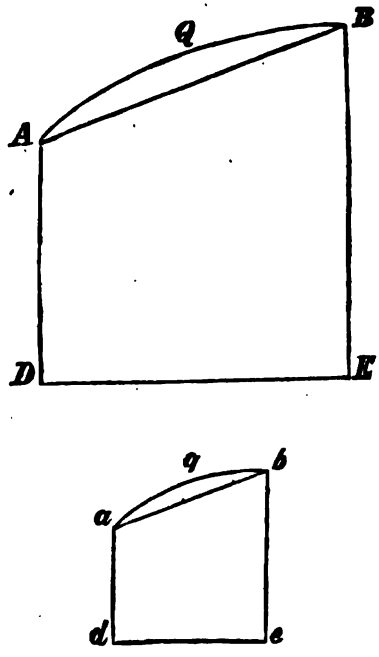
Men neem de vergelijking $y^2 = px + qx^2$, dus de vermaagſchapte lijn wordt uitgedrukt door de vergelijking $n^2 y^2 = p' mx + m^2 q x^2$ of $y^2 = \frac{p' mx}{n^2} + \frac{m^2 q' x^2}{n^2}$ dus $p' = \frac{p n^2}{m}$ en $q' = \frac{q n^2}{m^2}$. Indien dus de lijn eene parabel is, zal de vermaagſchapte lijn ook tevens gelijkvormig zijn.

65.

GELIJKVORMIGE PLATTE KROMLIJNIGE FIGUREN.

Platte figuren, door kromme lijnen ingeſloten, zijn gelijkvormig, indien deze kromme lijnen gelijkvormig zijn; zoo als alle cirkels, alsmede ellipſen en hijperbels, waarvan de betrekking der groote en kleine as dezelfde is. Ook zijn *platte figuren* gelijkvormig, welke ingeſloten zijn door *gelijkvormige bogen en door chorden, welke de overeenkomſtige punten vereenigen, of door gelijkvormige bogen, en door ordinaten en abſciſſen der overeenkomſtige punten.*

Fig. 23.



Indien bij voorbeeld de bogen AQB en aqb gelijkvormig zijn, en a en A, alsmede b en B overeenkomſtige punten zijn, dan zijn de ſegmenten $AQBA$ en $aqba$ gelijkvormig; alsmede de platte figuren $AQBED$ en $aqbed$, indien AD, ad, BE, be de ordinaten, en DE en de het verſchil der abſciſſen zijn voor de overeenkomſtige punten.

DERDE AFDEELING.

66.

VIER EN MEER PUNTEN, WELKE NIET IN HETZELFDE VLAK LIGGEN.

Drie punten welke niet in eene regte lijn liggen, kunnen ſlechts *een* vlak aanwijzen, omdat door dezelve ſlechts *een* vlak kan gaan. Zij brengen ons dus niet tot de ſnijding en hoeken der platte vlakken, noch tot de kromme vlakken, en lijnen van dubbele kromming, tot platvlakkige en kromvlakkige ligchamen. Hiertoe zijn meer dan drie punten noodig, welke niet in hetzelfde vlak zijn. Dus behoort de beſchouwing dezer meetkundige voorwerpen tot deze derde afdeeling.

67.

SNIJDING DER VLAKKEN. DOORSNEDE.

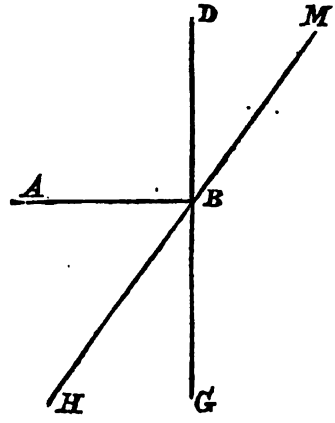
Dewijl door twee punten eene regte lijn en door drie punten, welke niet in eene regte lijn liggen, een vlak bepaald wordt, kan dus door eene regte lijn een oneindig getal van vlakken gaan, welke lijn derzelver *gemeenſchappelijke doorſnede* genoemd wordt. Bij de platvlakkige ligchamen, dat is bij die ligchamen, welke door platte vlakken zijn ingeſloten, noemt men

deze doorſneden der vlakken, de *ribben* der ligchamen. De punten, waarin deze doorſneden elkander ontmoeten, noemt men de *hoekpunten* of *toppen* van het ligchaam.

68.

RIGTING VAN EEN VLAK.

Fig. 24.



De lijn (*A B*) fig. 24, *rondom welke de ronddraaijing der lijn* (*B D*), *die het vlak DBMHG beſchrijft*, (volgens bl. 73 § 22) *geſchiedt*, *ſtaat loodregt op alle lijnen* (zoo als op *B D*, *B M*), *welke in dit vlak door het ontmoetingspunt B kunnen getrokken worden.*

Het

Het verſchil van hare rigting en van de rigting van alle lijnen, die in dat vlak kunnen zijn, is dus een regte hoek. Immers kan er geene lijn in het vlak getrokken worden, welke niet zou evenwijdig zijn aan eene van die lijnen, door dat ontmoetingspunt getrokken, en welke dus niet gelijke rigting met eene van die lijnen zou hebben. Dewijl nu de rigting der loodlijn *A B* om eenen regten hoek verſchilt met al de rigtingen der lijnen van het vlak, die door het ontmoetingspunt *B* gaan, verſchilt zij ook om eenen regten hoek met alle rigtingen, die in dat vlak zijn en door regte lijnen kunnen aangewezen worden. Dus *alle rigtingen van het vlak zijn van dezelfde ſoort, dat is, zij hebben dit gemeenſchappelijk kenteeken, dat zij met de rigting der loodlijn A B om eenen regten hoek verſchillen.* Wij ſchrijven dus aan elk vlak zelve deze bijzondere rigting toe; en geven hierdoor te kennen het gemeenſchappelijk kenteeken van alle rigtingen, die in dat vlak zijn. In dezelfde beteekenis zeggen wij ook, *dat die lijn loodregt op het vlak ſtaat.* Dewijl nu elk vlak eene onbeperkte grootte heeft, is dus deze depaalde rigting het eenige, waardoor zich het eene vlak van het andere onderſcheidt.

69.

HELLING VAN LIJNEN EN VLAKKEN TOT EEN VLAK. EVENWIJDIGHEID DERZELVE MET VLAKKEN.

Aldus de rigting van een vlak bepaald hebbende, zal het gemakkelijk zijn, aan te wijzen het verſchil van rigting van een vlak en van eene lijn, die elkander ontmoeten, alsmede van twee vlakken, die elkander ſnijden, en welke het kenteeken zij van evenwijdigheid van vlakken onder elkander, en van vlakken en lijnen enz. Wij kunnen de volgende bepalingen en gevolgen uit het voorgaande afleiden.

1. *Eene lijn ſtaat loodregt op een vlak, wanneer zij loodregt ſtaat op alle lijnen van het vlak, welke door het punt gaan, waarin zij het vlak ontmoet.*

1 *Gevolg.* Wanneer (fig. 24) AB rondom de lijn DBG, in den loodregten ſtand op dezelve blijvende, draait, dan zal zij insgelijks een vlak beſchrijven, terwijl door een punt van dezelve, bij voorbeeld A, eene cirkellijn beſchreven wordt. In deze cirkellijn is zoodanig een punt, dat wanneer A in hetzelve komt, de lijn AB ook loodregt ſtaat op BM, doch buiten dat punt gekomen zijnde, dezen loodregten ſtand verliest. Dit is dus de eenige ſtand, waarin AB op het vlak DBM, hetwelk door de twee lijnen DB en BM bepaald is, loodregt ſtaat, omdat daartoe vereischt wordt, dat zij ook op BM loodregt ſtaat. Hieruit volgt:

a.

a. Uit het punt B van het vlak BDM, kan ſlechts eene *lijn AB op dat vlak loodregt getrokken worden.*

b. Eene lijn, die loodregt ſtaat op twee lijnen van een vlak in dat punt, waarin zij elkander ontmoeten, ſtaat ook loodregt op alle lijnen van het vlak, die door dat punt gaan.

Indien dus *AB* loodregt ſtaat, op *BD* en *BM*, ſtaat dezelve ook loodregt op alle lijnen, die door het punt *B* in het vlak *DBM* kunnen getrokken worden, en gevolgelijk ook loodregt op het geheele vlak *DBM*.

2 *Gevolg. Het verſchil der rigting van deze lijn met alle rigtingen in dat vlak, is een regte hoek.*

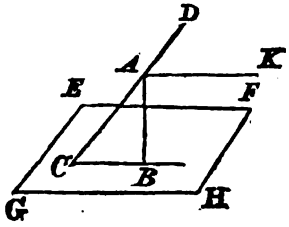
II. *De rigting van een vlak is de gemeenſchappelijke rigting van alle lijnen in het vlak, met betrekking tot de rigting van de lijn, die loodregt op het vlak ſtaat, en is dus gelijk aan eene rigting, welke met de rigting dezer loodlijn om eenen regten hoek verſchilt.*

III. *De helling van eene lijn tot een vlak, is het verſchil van rigting van die lijn en van dat vlak. Men gebruikt voor dit verſchil van rigting altijd den ſcherpen hoek en niet den aanliggenden ſtompen hoek.*

Gevolg 1. *De helling van eene lijn tot een vlak is dus gelijk aan het complement van den hoek, welken dezelve maakt met de lijn, die loodregt op dat vlak ſtaat.*

Fig.

Fig. 25.



Indien bij voorbeeld uit een punt A der lijn CAD (fig. 25) eene loodlijn AB op het vlak $EFGH$ getrokken is, dan is de helling der lijn CD tot dit vlak gelijk aan $90°-\angle CAB$, of gelijk aan den hoek DCB.

Immers laat V de rigting zijn van het vlak, l de rigting der lijn CD, en p de rigting der loodlijn AB, dan is

$V-p = 90°$; $l-p = \angle CAB$ dus $V-l = 90° - \angle CAB = \angle DCB$.

Gevolg. 2. *Twee evenwijdige lijnen hebben gelijke helling tot hetzelfde vlak. Indien dus van twee evenwijdige lijnen de eene loodregt op een vlak ſtaat, ſtaat de andere ook loodregt op hetzelve.* Wanneer men zich dus voorſtelt, dat op alle punten van een vlak evenwijdige lijnen ſtaan, en eene van dezelven op het vlak loodregt ſtaat, ſtaan zij alle daarop loodregt, —hetgeen wederom brengt tot de bepaalde rigting van een vlak, — want gelijke rigtingen (der

lood-

loodlijnen) op alle punten van het vlak verſchillen om eenen regten hoek van alle rigtingen, die in het vlak zijn.

Gevolg 3. *Indien twee lijnen op hetzelfde vlak loodregt ſtaan, zijn zij evenwijdig.*

IV. *Eene lijn is evenwijdig aan een vlak, waarin zij niet gelegen is, indien zij gelijke rigting met hetzelve heeft.*

Gevolg 1. *Eene lijn is dus evenwijdig aan een vlak, indien zij loodregt ſtaat op de loodlijn van het vlak, en niet in dat vlak is gelegen.* Dus is fig. 25 de lijn AK evenwijdig aan het vlak $EFGH$ indien $\angle KAB = 90°$.

2. *Eene lijn, evenwijdig aan een vlak, ontmoet hetzelve niet, en omgekeerd, indien eene lijn een vlak niet ontmoet, is zij aan hetzelve evenwijdig.*

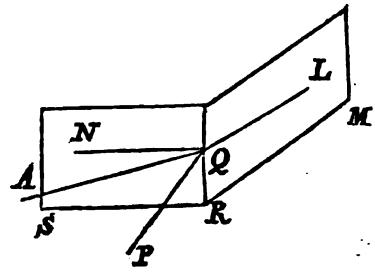
3. *Eene lijn, evenwijdig aan een vlak, heeft in al hare punten denzelfden afſtand van dat vlak, dat is, de lijnen, welke van deszelfs punten op het vlak loodregt getrokken worden, zijn gelijk aan elkander.*

V. *De helling van twee vlakken is het verſchil van derzelver rigtingen.* Men noemt dit verſchil ook den *ſtandhoek der vlakken*, of ook den *tweevlakkigen hoek.*

1 *Gevolg. Deze helling is dus gelijk aan den hoek, die gemaakt wordt door twee lijnen, welke uit een gemeenſchappelijk punt der doorſnede, op deze twee vlakken loodregt getrokken zijn.*

Fig.

Fig. 26.



Indien dus (fig. 26) PQ loodregt ſtaat op het vlak QRS: en AQ loodregt op het vlak QRM, zijnde QR de gemeenſchappelijke doorſnede, dan is $LAQP$ de helling der twee vlakken.

Want laat V en V' de rigtingen er van deze twee vlakken zijn en P en P' de rigtingen der op dezelve ſtaande loodlijnen, dan is $V-P = 90° = V'-P'$ dus $V-V' = P-P' = LAQP$.

Aanmerking. In de leer der beweging en van het evenwigt, zoo als bij de theorie der momenten, gebruikt men gewoonlijk den hoek der loodlijnen AQP, om de helling der vlakken aan te wijzen.

2 *Gevolg.* Laat (fig, 26) door de loodlijnen AQ en PQ een vlak AQP gaan, hetwelk de vlakken QRS en QRM in NQ en QL ſnijdt, dan ſtaat de lijn RQ op dit vlak loodregt, omdat zij loodregt ſtaat op AQ en PQ (volgens bl. 189) dus ſtaat zij ook loodregt op NQ en QL:

Maar

Maar $L\,PQN = L\,AQL = 90°$
dus $L\,PQN - L\,NQA = L\,AQL - L\,NQA$
dat is $L\,PQA = L\,NQL$.

Dus is ook de helling van twee vlakken gelijk aan den hoek, welken twee lijnen met elkander maken, die op de doorsnede loodregt zijn getrokken, de eene in het eene, de andere in het andere vlak.

Men gebruikt in de leerboeken gewoonlijk deze stelling, als bepaling der helling van twee vlakken, zonder dat de rede blijkt, waarom deze hoek voor de helling of het verschil der rigting van twee vlakken kan aangenomen worden.

Aanmerking. Men neemt altijd voor de helling den *scherpen* en niet den *stompen hoek*, welken de twee loodlijnen met elkander maken, even zoo, als dit geschiedt bij de bepaling der helling van eene lijn tot een vlak (bl. 189.)

VI. *Twee vlakken staan loodregt op elkander, indien het verschil van derzelver rigtingen eenen regten hoek bedraagt.*

Gevolg 1. Dus is (fig. 26) het vlak SRQ loodregt op het vlak $LQRM$, indien $L\,AQP$ of $L\,NQL$ een regte hoek is.

Gevolg 2. In dit geval staat NQ loodregt op het vlak QRM, omdat zij loodregt staat op QR en QL. Om dezelfde rede staat LQ loodregt op het vlak PQR, omdat zij loodregt staat op QR en

NQ. Dus vallen NQ en AQ in elkander, alsmede NQ en PQ, dat is:

Indien twee vlakken op elkander loodregt ſtaan, dan zal de lijn, welke uit een punt der doorſnede op het eene vlak loodregt getrokken wordt, geheel in het ander vlak liggen, en omgekeerd, indien zij in dit tweede vlak ligt, ſtaan de twee vlakken op elkander loodregt.

Gevolg 3. *Indien twee vlakken op elkander loodregt ſtaan, zal elke lijn, welke in het eene vlak loodregt op de doorſnede is getrokken, op het andere vlak loodregt ſtaan.*

Gevolg 4. *Indien eene lijn op een vlak loodregt ſtaat, zal elk vlak, waarin zich die lijn bevindt, op dat vlak loodregt ſtaan.*

Gevolg 5. *Indien twee vlakken op een derde vlak loodregt ſtaan, zal ook derzelver gemeenſchappelijke doorſnede op dit vlak loodregt ſtaan.*

VII. *Twee vlakken zijn evenwijdig, indien zij gelijke rigtingen hebben.*

Hieruit volgt: *dat twee vlakken evenwijdig zijn, indien op beide dezelfde regte lijn loodregt ſtaan.* Dus zijn aan elk vlak een oneindig getal vlakken evenwijdig.

Ook zijn twee vlakken evenwijdig, indien zij elkander niet ſnijden.

Omgekeerd, indien twee vlakken evenwijdig zijn, zullen zij elkander niet ſnijden, en de lijn, welke

op

op het eene vlak loodregt ſtaat, zal verlengd zijnde ook op het andere loodregt ſtaan. Indien zij door een vlak geſneden worden, zullen de doorſneden evenwijdig zijn. De loodlijnen tusſchen dezelve getrokken zijn gelijk, even zoo als bij de evenwijdige lijnen. In die beteekenis zegt men, *dat evenwijdige vlakken, zoo als ook evenwijdige lijnen, overal denzelfden afſtand van elkander hebben.*

70.

ONTMOETING DER DOORSNEDE VAN VERSCHILLENDE VLAKKEN.

Wanneer de doorſneden van verſchillende vlakken elkander in een punt ontmoeten, dan ontſtaan bij dit ontmoetingspunt even zoo vele hoeken der doorſneden en der vlakken, als er vlakken zijn. Men pleegt deze zamenſtelling van hoeken *eenen ligchamelijken hoek*, of ook naar het getal der vlakken, eenen *drievlakkigen*, *viervlakkigen* en *veelvlakkigen* hoek te noemen, doch deze benaming is minder gepast, dewijl hier niet *een hoek*, maar eene verzameling is van verſchillende hoeken. Van deze hoeken der doorſneden en der vlakken hangt de form der platvlakkige ligchamen geheel en al af, weshalve de beſchouwing van derzelver betrekking in de meetkunde gewigtig is. Men pleegt de doorſneden dezer vlakken

ribben, en het punt waarin zij elkander ontmoeten, *den top* te noemen.

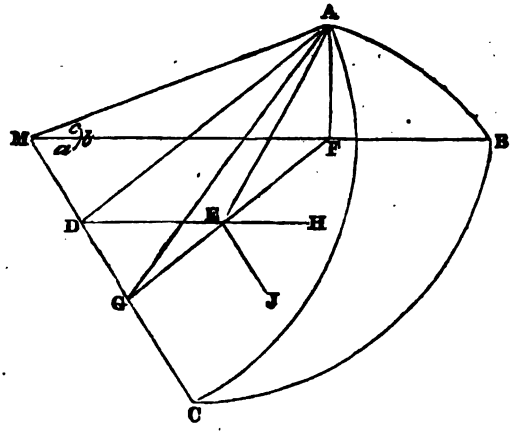
71.

HOEKEN DOOR DE ZAMENKOMST DER DOORSNEDEN VAN DRIE VLAKKEN ONTSTAANDE.

De eenvoudigſte betrekking van dezen aart is diegeene, welke plaats heeft tuſſchen zes hoeken, ontſtaande door de zamenkomst van drie vlakken. Zoodanige betrekkingen worden aangewezen door vergelijkingen der *hoeklijnen* (*goniometerſche lijnen*) *van deze hoeken der doorſneden en vlakken*, welke voornamelijk dienen, *om uit drie gegevene hoeken de overige drie hoeken te vinden.* De volgende twee grondvergelijkingen, waaruit andere gemakkelijk kunnen afgeleid worden, ſteunen op hetgeen van de ſnijding der vlakken gezegd is, gelijk de volgende beſchouwing zal doen zien.

Fig.

Fig. 26.



Laat AMC het grondvlak zijn, doch de lijn MB buiten dit vlak zijn, dan ontstaan er drie vlakken AMC, AMB en BMC, waarvan de doorsneden of ribben zijn MA, MB en MC, welke in het punt M bij elkander komen en aldaar drie hoeken vormen. Laat deze hoeken der doorsneden zijn a, b, c en de hoeken der vlakken A, B, C; namelijk $\angle BMC = a$, $\angle AMC = b$, $\angle AMB = c$, hoek der vlakken AMB en $AMC = A$; hoek der vlakken BMA en $BMC = B$, hoek der vlakken CMB en $CMA = C$.

Om de hoeken B en C te bepalen, trek AF en GF loodregt op de doorsnede MB en AD en DE loodregt op de doorsnede MC dan is $\angle AFG = B$ $\angle ADE = C$. (bl. 193).

De lijn AE, welke het punt A met het ſnijpunt E der lijnen DE en EF vereenigt, ſtaat loodregt op het vlak MBC. Trek namelijk in het vlak BMC de lijn EH evenwijdig aan MB en EJ evenwijdig aan MC. Dewijl nu MC loodregt ſtaat op het vlak ADE (bl. 189 *b*) ſtaat ook EJ daarop loodregt (bl. 190 gev. 2), dus is $\angle AEJ$ een regte hoek. Insgelijks is MB loodregt op het vlak AEF dus is ook EH daarop loodregt, en AEH is een regte hoek. Hieruit volgt dat AE op het vlak MBC en dus ook op DE en EF loodregt ſtaat.

Dus $AE = AD$ *ſin.* $ADE = AF$ *ſin.* AFE

of $AE =$ *ſin.* b *ſin.* $C =$ *ſin.* c *ſin.* B, of

$$\frac{\text{ſin. } b}{\text{ſin. } c} = \frac{\text{ſin. } B}{\text{ſin. } C.}$$

Dit is de eerſte grondvergelijking. Eene tweede wordt gevonden door de vergelijking der driehoeken AGF en AMG, welke de zijde AG gemeenſchappelijk hebben

dus $AG^2 = AF^2 + FG^2 - 2\,AF.\,FG\,cos.\,AFG$
$= AM^2 + MG^2 - 2\,AM.\,MG\,cos.\,AMC.$

Maar dewijl de hoeken AFM en MFG regte hoeken zijn, heeft men

$AF = MF$ *tang.* $C.$	$AM = MF$ *ſec.* $c.$
$FG = MF$ *tang.* $a.$	$MG = MF$ *ſec.* $a.$
$\angle AFG = B$	$\angle AMC = b.$

dus

dus $tang.^2 c + tang.^2 a - 2\ tang.\ c\ tang.\ a\ cos.\ B = sec.^2 c + sec.^2 a - 2\ sec.\ c\ sec.\ a\ cos.\ b.$

of $-2\ tang.\ c\ tang.\ a\ cos.\ B = 2 - 2\ sec.\ a.\ sec.\ c\ cos.b.$

Deze vergelijking met $cos\ a\ cos\ c$ vermenigvuldigd zijnde, wordt

$sin.\ a\ sin.\ c\ cos.\ B = cos.\ b - cos.\ a\ cos.\ c$

of $cos.\ B = \frac{cos.\ b - cos.\ a\ cos.\ c}{sin.\ a\ sin.\ c.}$

Aanmerking. De beſchouwing der betrekking dezer zes hoeken is, in meer dan een opzigt, zeer gewigtig. Vooreerst is bij ligchamen, door platte figuren ingefloten, de zamenkomst van drie platte figuren het menigvuldigst, zoo als bij prismatiſche en pyramidale ligchamen. Indien men b. v. door een der ribben van eenen veelvlakkigen hoek een plat vlak laat gaan, dan ontſtaan door die ſnijding zoo vele drievlakkige hoeken als er ribben zijn, alsmede een door die platte figuren ingefloten ligchaam. Ook ligt deze betrekking ten grondſlage der betrekking van hoeken door de zamenkomst van meer dan drie vlakken ontſtaande. Eindelijk is deze betrekking in de ſterre- en aardrijkskunde van een groote toepaſſing. Uit hoofde van deze toepaſſing is men gewoon deze zes hoeken door eenen zoogenoemden *bolvormigen driehoek*, zoo als ABC, aan te wijzen, waarvan wij ſtraks nader zullen handelen.

72.

ONEINDIGE RUIMTE.

Indien een plat vlak rondom eene, in hetzelve liggende lijn, eene halve ronddraaijing maakt, en dus wederom in de vorige rigting komt, zal hetzelve de oneindige ruimte beſchrijven, dat is: er zal geen punt der oneindige ruimte zijn, waarin niet een punt van dat vlak bij die ronddraaijing geweest is.

73.

MEETKUNDIG LIGCHAAM.

Een bepaald gedeelte der oneindige ruimte wordt een meetkundig ligchaam genoemd.

Aanmerking. Wij zijn dus uitgegaan van de grondbegrippen, *rigting* en *afſtand*, hierdoor gekomen tot de voorſtelling van eene *regte lijn*, van *eenen hoek in het algemeen*, en van eenen *regten hoek* in het bijzondere; hierdoor tot de voorſtelling van *een plat vlak*, welke ons brengt tot die der *oneindige ruimte* en deze tot die van een *meetkundig ligchaam*. De voorſtelling van het plat vlak geleidde ons tevens tot de beſchouwing van platte figuren, van kromme lijnen, en ſnijding der vlakken, en deze moeten ons thans dienen ter bepaling der verſchillende ſoorten der meetkundige ligchamen.

74.

GEBROKENE FIGUUR.

Eene gebrokene figuur is eene zamenſtelling van platte figuren (§ 24), *waarvan elke eene andere rigting heeft, dan de aangrenzende figuur.* Indien dus het verſchil van rigting dezer zamenſtellende figuren ophoudt, dan wordt de gebrokene figuur in eene platte figuur veranderd.

Laat b. v. de ribben van eenen n vlakkigen hoek door een plat vlak geſneden worden, dan ontſtaat een ligchaam ingeſloten door eene gebrokene figuur uit $n+1$ platte figuren zamengeſteld, namelijk uit n driehoeken en uit eenen veelhoek van n zijden.

Aanmerking. De rigting van eene platte figuur is dezelfde als die van het vlak, waarin zij zich bevindt, en waarvan zij een deel uitmaakt (§ 24); en daarom zegt men ook wel: *een gebroken vlak is eene zamenſtelling van platte vlakken.*

75.

GEBROKENE PLATVLAKKIGE FIGUUR.

De gebroken figuur wordt genoemd eene platvlakkige gebrokene figuur, indien de zamenſtellende figuren eene eindige grootte hebben.

76.

KROMVLAK, OF KROMME FIGUUR.

Eene gebrokene figuur, waarvan elke zameſtellende figuur kleiner is dan elke eindige platte figuur, wordt een krom vlak genoemd. Wij kunnen daarom deze zamenſtellende figuren *differentiale figuren* noemen. Men noemt dezelve gewoonlijk *differentiale vlakken.*

Aanmerking. De naam van *krom vlak* is gebruikelijk. Beter zou de benaming zijn *kromme figuur*, welke men dus van *kromlijnige figuur* (§ 35 bl. 98) moet onderſcheiden.

GEVOLG.

Een krom vlak beſtaat dus uit differentiale figuren, waarvan elke eene andere rigting heeft, dan de aangrenzende. Terwijl alle deelen van een plat vlak dezelfde rigting hebben en dus al de loodlijnen op hetzelve getrokken evenwijdig zijn, heeft dus geen deel van een krom vlak dezelfde rigting, als het aangrenzende deel; weshalve de loodlijnen, op die twee deelen geplaatst, elkander ſnijden.

77.

ZAMENGESTELDE FIGUUR.

Eene gebrokene figuur, welke gedeeltelijk uit platvlakkige gebrokene figuren, gedeeltelijk uit krom-

kromme figuren beſtaat, wordt eene zamengeſtelde figuur genoemd.

GEVOLG.

Er beſtaat dus analogie tusſchen eene *gebrokene, kromme, zamengeſtelde lijn*, en tusſchen eene *gebrokene, kromme* en *zamengeſtelde figuur*, zoodat wij met verandering van eenige woorden dezelfde bepaling van de laatſte gegeven hebben, als wij van de eerſte gegeven hadden. (zie § 33. 34. 35. bl. 97. 98.)

78.

PLATVLAKKIG, KROMVLAKKIG EN ZAMENGESTELD-VLAKKIG LIGCHAAM.

Een meetkundig ligchaam is ingeſloten, of door eene *gebrokene platvlakkige* figuur, of door eene *kromme*, of door eene *zamengeſtelde* figuur. In het eerſte geval wordt hetzelve een *platvlakkig* (ook wel *veelhoekig ligchaam*, een *Polyedron*), in het tweede geval een *kromvlakkig*, in het derde geval een *zamengeſteld-vlakkig ligchaam* genoemd. De *gebrokene* figuur, waarin een ligchaam is ingeſloten, wordt ook de *oppervlakte van het ligchaam* genoemd. Bij ſommige ligchamen onderſcheidt men nog de deelen dezer oppervlakte door de woorden: *zijvlak, grondvlak, bovenvlak.*

GR-

GEVOLG 1.

Van de eerſte ſoort zijn dus de Prismas, Pyramiden, de regelmatige ligchamen; van de tweede ſoort zijn de globen, ellipſoïden en alle ligchamen, welke men kan beſchouwen als beſchreven door de rondraaijing van eene geſlotene kromme lijn rondom hare as; van de derde ſoort zijn de cylindervormige en kegelvormige ligchamen, de Paraboliſche en Hyperboliſche ligchamen, en alle andere, beſchreven door de ronddraaijing van eene niet geſlotene kromme lijn rondom hare as, en waarvan de grondvlakken platte vlakken zijn. Door die ronddraaijing namelijk ontſtaat de oppervlakte dezer ligchamen.

GEVOLG 2.

Indien een platvlakkig ligchaam door platte vlakken geſneden en gedeeld wordt, zijn al de deelen ook platvlakkige ligchamen. Indien een kromvlakkig en een zamengeſteld-vlak ligchaam door één platvlak geſneden worden, zijn de twee deelen zamengeſtelde vlakkige ligchamen; zoo als, bij voorbeeld, de twee ſegmenten van eene globe, en de twee deelen van den kegel, wanneer de doorſnede een driehoek, eene ellips, parabel of hyperbel is.

GEVOLG 3.

Men neme op de oppervlakte van een ligchaam drie niet aangrenzende punten, welke ook niet gelegen zijn

zijn in dezelfde regte lijn, vereenige dezelve door drie regte eindige lijnen, dan kunnen bij een kromvlakkig ligchaam deze drie lijnen niet geheel vallen op de oppervlakte of op de kromme figuur; doch bij een platvlakkig en zamengefteld-vlakkig ligchaam is zulks mogelijk.

79.

GRENSVLAKKEN, HOEKPUNTSLIJNEN, DIAGONALEN DER LIGCHAMEN.

De platte of kromme figuren, waaruit de oppervlakte van een ligchaam beftaat, kunnen wij de *grensvlakken* van het ligchaam noemen. Bij fommige ligchamen onderfcheidt men deze grensvlakken door de woorden, *zijvlak*, *grondvlak*, *bovenvlak*. Zoo heeft b. v. een cylinder drie grensvlakken, welke zijn een grond- en bovenvlak en een krom zijvlak, Een n hoekig prisma heeft $n+2$ grensvlakken, een grondvlak, een bovenvlak, en n zijvlakken.

Wij hebben de hoekpunten der ligchamelijke hoeken op de oppervlakte van een ligchaam voorkomende *toppen* genoemd (§ 70). De regte lijnen welke deze toppen vereenigen, kunnen wij *hoekpuntslijnen* noemen. Deze hoekpuntslijnen kunnen zijn de doorfneden van twee vlakken op de oppervlakte van het ligchaam, in welk geval zij *de ribben van het ligchaam*

chaam genoemd worden, (zie § 70). Maar zij kunnen ook door het ligchaam gaan, en ook de diagonalen zijn van figuren op de oppervlakte van het ligchaam. Deze hoekpuntslijnen zullen wij, overeenkomstig met de diagonalen der platte figuren, *diagonaallijnen* of *diagonalen* noemen.

De platte hoeken van elk grensvlak, gevormd door de ribben en diagonalen, zullen wij eenvoudig *hoeken*, doch de hoeken, welke de grensvlakken met elkander maken, *hoeken der vlakken* of *helling der vlakken* noemen.

Ter opheldering hiervan kunnen dienen de regelmatige ligchamen.

	Tetraëdron,	Hexaëdron,	Octaëdron,	Dodecaëdron,	Icosaëdron.
getal der grensvlakken	4	6	8	12	20
» » toppen	4	8	6	20	12
» » ribben	6	12	12	30	30
» » hoeken der ribben	12	24	24	60	60
» » diagonalen der grensvlakken	geen	12	geen	60	geen
» » diagonalen door het ligchaam gaande	geen.	4	3	100	36

Aanmerking. Sommige noemen *hoekpuntslijnen*, welke wij *diagonalen*, en *zijvlakken*, welke wij *grensvlakken* genoemd hebben. Maar het woord *hoekpuntslijn* moet toch het geslacht aanwijzen, waarvan

van *ribben*, welke toch ook lijnen der hoekpunten zijn, eene ſoort uitmaken. *Zijvlak* is daarentegen eene ſoort van grensvlak, tegengeſteld aan die grensvlakken, welke wij het bovenvlak, benedenvlak, grondvlak noemen.

80.

VERSCHIL DER KROMME VLAKKEN.

Men neme in een krom vlak twee niet aangrenzende punten, en vereenige dezelve door eene eindige regte lijn, dan valt bij ſommige kromme vlakken deze lijn nooit in dezelve, hoedanig de punten ook genomen worden, terwijl zulks bij anderen mogelijk is.

Tot de eerſte ſoort behooren de oppervlakten der globen, ellipſoïden, enz. *Alle doorſneden derzelve door een plat vlak zijn dus kromme lijnen, en de differentiaal-figuren kunnen elkander in geene regte lijnen ſnijden.*

Tot de tweede ſoort behooren de kromme zijvlakken der cylindervormige en kegelvormige ligchamen. *Deze kunnen door een vlak zoodanig geſneden worden, dat de doorſneden regte lijnen zijn. De differentiaal-figuren, in eene zekere rigting op elkander volgende, ſnijden elkander in regte lijnen.*

In

In de cylinder-vlakken zijn de gemeenſchappelijke doorsneden dezer differentiaal figuren regte lijnen, die evenwijdig zijn; in de kegelvlakken loopen dezelve in een punt te zamen.

Deze onderſcheiding der komme vlakken is zeer gewigtig. Bij de eerſte ſoort is de kromming in alle rigtingen; bij de tweede ſoort is dezelve niet in alle rigtingen; zoo, bij voorbeeld, bij de cylinder- en kegelvlakken is er geene kromming in de rigting van het grondvlak naar het bovenvlak of naar het toppunt. Men zou dus de tweede ſoort kunnen noemen: *enkelvoudig komme vlakken*, en de eerſte *dubbeld komme vlakken.*

Aanmerking 1. Wij nemen hier kegel- en cylinder-vlak in eene ruime beteekenis van het woord, en geven daarvan de volgende genetiſche bepaling:

Wanneer eene regte lijn (generatrix) over eene gegevene komme lijn (directrix) bewogen wordt, en bij die beweging altijd door hetzelfde punt gaat, dan is het kromvlak, door dezelve beſchreven, een kegelvlak. Indien zij intuſſchen bij die beweging altijd evenwijdig blijft aan eene gegevene onbewegelijke regte lijn, dan is het beſchrevene kromme vlak eene cylindervlak.

Aanmerking 2. Wij zouden hier nog van andere verſchillen kunnen ſpreken, welke bij de kromvlakkige ligchamen plaats hebben, alsmede van bijzondere ſoorten van komme lijnen, van figuren en ligcha-

chamen, waarvan wij hier geen gewag gemaakt hebben. Doch deze vertoonen zich van zelve bij de meetkundige beſchouwing van derzelver hoedanigheden en betrekkingen, en konden dus hier, waar wij geenszins eene volledige lijst, maar ſlechts voorbeelden van bepalingen willen geven, voegzaam voorbij gegaan worden. Men vindt vele van dezelve bij EULER, in de *Introductio in Analysin finitorum.*

81.

HET PLAT VLAK, RAKENDE EEN KROM VLAK.

Het vlak, waarin zich de differentiaal figuur bevindt, word genoemd het rakend vlak van het kromme vlak. Deze aanraking is verſchëiden, naarmate het kromme vlak enkelvoudig- of dubbeld krom is.

AANMERKING.

Men ziet ook hier de analogie tusſchen *eene raaklijn* en *een rakend plat vlak.* Dezelve ſtrekt zich ook uit tot *de elkander rakende kromme lijnen en kromme vlakken.* Gelijk de aanraking der kromme lijnen, zoo heeft ook die der kromme vlakken verſchillende graden. Hoe dezelve gevonden worden, leert de Differentiaalrekening. De methode is overeenkomſtig met die, welke men bij de kromme lijnen gebruikt.

82.

NORMAAL VAN EEN KROM VLAK.

Normaal van een punt van een krom vlak is de lijn, welke door dat punt gaat, en in dit punt loodregt ſtaat op het rakend vlak. Zoo zijn bij voorbeeld de radiën eener globe normalen van dat punt der oppervlakte, tot hetwelk zij gaan. De globe onderſcheidt zich daardoor van andere kromvlakkige ligchamen, dat alle normalen van dezelve aan elkander gelijk zijn, en zich in hetzelfde punt ontmoeten, even zoo als een cirkel zich ook hierin van andere platte figuren onderſcheidt.

83.

I. GEVOLG.

HOEK VAN TWEE KROMME VLAKKEN.

De hoek, welken twee elkander ſnijdende kromme vlakken in een punt der doorſnede maken, is de hoek der, door dit punt gaande, normalen van deze vlakken. Naarmate dus dit punt der doorſnede verſcheiden is, kan ook de hoek verſchillend zijn.

84.

84.

2. GEVOLG.

HOEK VAN EEN PLAT VLAK EN VAN EEN KROM VLAK.

Wanneer een krom vlak door een plat vlak geſneden wordt, zal de hoek dezer twee vlakken in een bepaald punt der doorſnede die hoek zijn, welke gemaakt wordt door twee door dit punt gaande lijnen, waarvan de eene loodregt op het plat vlak ſtaat, en de andere eene normaal van het kromme vlak is.

85.

KROMME LIJNEN VAN ENKELVOUDIGE EN VAN DUBBELDE KROMMING.

Ten aanzien van de vlakken, waarin zich eene kromme lijn bevindt, kunnen er drie gevallen plaats hebben.

1. *Het eerſte geval is, wanneer alle deelen der kromme lijn in een en hetzelfde vlak zijn.* Zoodanig eene kromme lijn noemt men *eene lijn van eene enkelvoudige kromming*, en van deze ſoort zijn al degenen, welke wij tot nu toe beſchouwd hebben. Wanneer een krom vlak, zoo als bij voorbeeld het kromme vlak van eenen cylinder, kegel of van eene globe, door een plat vlak geſneden wordt,

zijn de doorsneden of regte lijnen of kromme lijnen van enkelvoudige kromming. De punten van deze lijnen, indien zij volgens eene zekere wet voortgaan, worden bepaald door eene vergelijking tusschen twee coördinaten x en y van dezelve. (Men zie §39 bl. 104).

2. *Het tweede geval is, wanneer geen eindig gedeelte van de kromme lijn in hetzelfde vlak is.* Zoodanig eene kromme lijn noemt men eene lijn van dubbelde kromming. Dezelve verandert bestendig in een tweevoudig opzigt, in *rigting* en in *vlak*, en staat dus in dezelfde betrekking tot eene lijn van enkelvoudige kromming, als deze laatste staat tot eene regte lijn. *Alle deelen der regte lijn zijn in dezelfde rigtig en in hetzelfde vlak. Alle deelen der lijn van enkelvoudige kromming zijn in hetzelfde vlak, doch geen deel is in dezelfde rigting als het aangrenzende gedeelte. Elk deel der lijn van dubbelde kromming is noch in dezelfde rigting, noch in hetzelfde vlak als het aangrenzende gedeelte.* De punten van deze laatste lijn moeten dus gelijk de punten van een krom vlak of van een ligchaam, door drie coördinaten x, y, z bepaald worden, waarvan de laatste *de verandering van vlak* aanwijst.

3. Het derde geval is, *wanneer sommige gedeelten der lijn van eene enkelvoudige, andere gedeelten daarentegen van eene dubbelde kromming zijn.* Deze lijnen kan men noemen *lijnen van zamengestelde kromming.*

86.

REGELMATIGE PLATVLAKKIGE LIGCHAMEN.

Regelmatige platvlakkige ligchamen zijn diegenen, wier veelvlakkige hoeken volkomen aan elkander gelijk zijn; waartoe ook behoort de gelijkheid der overeenkomſtige hoeken door de Diagonalen gevormd.

Aanmerking. Hetgeen de regelmatige platte figuren als figuren zijn, zijn de regelmatige platvlakkige ligchamen als ligchamen. Daarom is er ook overeenkomst tusſchen de bepaling van beide. *De regelmatigheid hangt bij beide af van de gelijkheid der hoeken.*

GEVOLG.

Uit deze bepaling volgt:

1, de platte figuren, waarin het ligchaam is ingeſloten, zijn regelmatig, en volkomen gelijk aan elkander.

2. Elk regelmatig platvlakkig ligchaam heeft een punt, hetwelk even verre afſtaat van alle toppen des ligchaams, voorts van alle ribben, en van al de inſluitende grensvlakken.

3. Dewijl de ſom der hoeken der ribben aan elken top kleiner moet zijn dan 360°, kunnen er ſlechts 5 regelmatige platvlakkige ligchamen zijn. Deze zijn mogelijk, gelijk de Meetkunde aanwijst, en zijn de volgende:

a. het *Tetraëdron* door vier regelmatige driehoeken ingefloten. De ſom der driehoeken der ribben bij elken top bedraagt 180°, zijnde elke hoek 60°.

b. Het *Octaëdron*, door acht regelmatige driehoeken ingefloten. Hier is de ſom der vier hoeken van de ribben 240°, zijnde elke hoek 60°.

c. Het *Icoſaëdron* door 20 regelmatige driehoeken ingefloten. Hier is de ſom der vijf hoeken van de ribben 300°, zijnde elke hoek 60°.

d. Het *Hexaëdron* of de Cubus ingefloten door 6 Quadraten. De ſom der drie hoeken van de ribben is 270° en elke hoek 90°.

e. Het *Dodecaëdron*, ingefloten door 12 regelmatige vijfhoeken. De ſom der drie hoeken van de ribben is 324° en elke hoek 108°.

Hierin verſchillen dus deze ligchamen van regelmatige platte figuren. Van deze laatſten is het getal der ſoorten oneindig groot, terwijl er ſlechts 5 ſoorten van platvlakkige regelmatige ligchamen zijn.

Indien ϕ is de hoek, welken de vlakken met elkander maken, dan is voor

een Tetraëdron, *cos.* $\phi = \frac{1}{3}$ dus $\phi = 70° 32'$

een Octaëdron, *cos.* $\phi = -\frac{1}{3}$ dus $\phi = 109° 28'$

een Icoſaëdron, *ſin.* $\phi = \frac{2}{3}$ dus $\phi = 131° 48'$

een Hexaëdron, *cos.* $\phi = 0$ dus $\phi = 90°$

een Dodecaëdron, *tang.* $\phi = -2$ dus $\phi = 116° 34'$

87.

LIGCHAMEN DOOR RONDDRAAIJING VAN PLATTE FIGUREN RONDOM EENE LIJN VOORTGEBRAGT.

Indien in plaats van een onbepaald plat vlak, gelijk bij § 72, eene bepaalde platte figuur rondom eene lijn draait, ontſtaan hierdoor, gelijk wij reeds bij § 78 opgemerkt hebben, kromvlakkige- en zamengeſteld vlakkige ligchamen. Derzelver form hangt af van de form der ronddraaijende figuur. Indien b. v. een regthoekige driehoek rondom zijne regthoekzijde, een regthoekig parallelogram rondom zijne zijde, eene ellips rondom hare as draait, ontſtaan de ligchamen, welke men noemt, *regthoekige kegel*, *cylinder* en eene *elliptiſche ſphaeroide*. In het bijzonder is hier merkwaardig de *globe* (*bol*, *ſpheer*) ontſtaande door de ronddraaijing van eenen halven cirkel om de middellijn. *Hetgene de cirkel is als platte kromlijnige figuur, is de globe als kromvlakkig ligchaam.*

Aanmerking. Er zijn Wiskundigen, die de meetkunde van al het vreemdſoortige willende zuiveren, niet toelaten, dat men daarin van beweging en ronddraaijing ſpreke. Ik beken, dat ik geene voldoende gronden voor deze zuivering zie. De beroemde verdienſtelijke wiskundige Dr. A. L. CRELLE in zijn *Leerbuch der Elemente der Geometrie*, enz. bl. 800, wil niet, dat men den regthoekigen cylinder bepale, als

ontſtaande door de beweging van een regthoekig parallelogram rondom eene zijde; en zegt bij die gelegenheid:

„*Eene bepaling door beweging is niet meetkundig. Het begrip van beweging is der meetkunde vreemd.*"

Deze ſtelling bewijst hij met de volgende twee gronden:

1.) *De meetkunde houdt zich niet bezig met het ontſtaan der figuren, maar neemt veeleer aan, dat de figuren voorhanden zijn, en onderzoekt ſlechts derzelver ruimte-hoedanigheden.*

2.) *De beweging, dat is de werking van krachten, is het voorwerp der mechanica, en de mechanica veronderſtelt de meetkunde, dus kan niet, omgekeerd, de meetkunde de mechanica veronderſtellen.*

Men zou evenwel, dunkt mij, hierop kunnen aanmerken:

1.) *De meetkunde houdt zich voorzeker ook bezig met het ontſtaan van figuren.* Moet niet vaak de mogelijkheid eener figuur bewezen worden, en wordt dezelve niet meestal bewezen *door het doen ontſtaan van dezelve*, dat is door de conſtructie der figuur? Ontſtaat er niet eene figuur, wanneer het problema, hetwelk verlangt, dat zij ontſtaat, opgelost wordt? Is niet de vraag, hoe wordt een regelmatige vijfhoek beſchreven? dezelfde, als, hoe ontſtaat dezelve? Dus is de eerſte grond geheel onjuist.

2.) In de meetkunde wordt geenszins gehandeld over

over het ontſtaan of over de beweging van een ſtoffelijk voorwerp (van eene plant, dier, werktuig, enz.) maar van *het ontſtaan der voorſtelling eener meer zamengeſtelde meetkundige grootheid, door de voorſtelling der beweging van eene meer eenvoudige.* Hier wordt dus volſtrekt aan geene materiële kracht gedacht, als voortbrengende de beweging. Dit zou ongerijmd zijn. Wanneer ik dus bij voorbeeld zeg: eene globe wordt beſchreven door de beweging van eenen halven cirkel rondom deszelfs middellijn, beteekent zulks, dat de voorſtelling van eene globe ontſtaat, wanneer men zich die beweging voorſtelt, en datgene in de voorſtelling vereenigt en zamenſtelt, door hetwelk die halve cirkel gegaan is. De verbeelding volgt, als het ware, die beweging, en verzamelt de deelen tot een geheel. Dit is toch geene beweging, welke, gelijk de Heer CRELLE zegt, de *werking* van eene kracht zoude zijn, tenzij dat men ze beſchouwt als de werking der verbeeldingskracht, maar van de werking der verbeeldingskracht handelt de mechanica niet. Dus deze en ſoortgelijke bewegingen, welke de meetkundige gebruikt, behooren niet, (althans niet uitſluitend) in het gebied der mechanica, ten minſte de meetkundige behoeft de mechanica niet te veronderſtellen, noch iets uit dezelve te ontleenen, om zich deze bewegingen voor te ſtellen, en dezelve te gebruiken. Heb ik noodig eenige les of voorſchrift, uit de mechanica ontleend, om

cirkel, hare radiën en middellijnen zoo als PP', Aa, Ff.

2. Gelijk de radiën of middellijnen van eenen cirkel alle rigtingen aanwijzen, welke in het vlak, waarin zich de cirkel bevindt, kunnen plaats hebben, *zoo worden door de radiën of middellijnen der globe alle rigtingen, die in de oneindige ruimte kunnen zijn, aangewezen.*

3. Gelijk de radius van eenen cirkel loodregt ſtaat op de raaklijn van den cirkel, *zoo ſtaat ook de radius der globe loodregt op het rakende vlak der globe* (§ 80). De globe onderſcheidt zich daardoor van alle andere kromvlakkige ligchamen, dat derzelver normalen (de radiën) gelijk zijn, en elkander in hetzelfde punt ontmoeten. Door dezelfde hoedanigheid onderſcheidt zich de cirkel van alle andere platvlakkige figuren (§ 41).

4. *Rondom en binnen een regelmatig platvlakkig ligchaam kan uit het middenpunt van hetzelve eene globe beſchreven worden* (§ 85). Wij kunnen dus eene globe beſchouwen als een kromvlakkig regelmatig ligchaam, waarin de radiën der toppen, gelijk zijn aan de radiën der vlakken, zijnde *radiën der toppen* de lijnen uit het middenpunt naar de toppen getrokken, en *radiën der vlakken*, de loodlijnen uit het middenpunt op de grensvlakken getrokken.

5. *Indien eene globe door een plat vlak geſneden wordt, is de doorſnede altijd een cirkel;* een kenteeken, waardoor zich de globe van elk ander ligchaam on-

onderſcheidt. De middellijn der globe, welke op dat vlak loodregt ſtaat, gaat door het middenpunt van den cirkel. Laat PP' loodregt ſtaan op de cirkels BE, AF, DG, dan gaat dezelve door c, m, c' of door de middenpunten der cirkels. $Bc = V(Bm^2 - mc^2)$. Indien dus d de afſtand des cirkels van het middenpunt is, r deszelfs radius, en R de radius der globe, dan is $r = V(R^2 - d^2)$. De cirkels dus, bij welke $d = o$ is, of welke door het middenpunt der globe gaan, zoo als AF, zijn aan elkander gelijk, en zijn de grootſten van allen, weshalve zij ook *groote cirkels*, en de overigen *kleine cirkels* genoemd worden. Alle groote cirkels deelen de globe midden door.

6. *De as van eenen cirkel is de middellijn der globe, welke op den cirkel loodregt ſtaat.* De eindpunten van deze as noemt men *de polen* van den cirkel. Zij gaat dus ook door het middenpunt van den cirkel. Indien dus Pp loodregt ſtaat op de cirkels BE, AF, DG dan is zij de as van deze evenwijdige cirkels. *Alle evenwijdige cirkels hebben dezelfde as, en omgekeerd, cirkels, die dezelfde as hebben, zijn evenwijdig.*

Dewijl de lijn PP' door de polen van den cirkel DG, door deszelfs middenpunt en het middenpunt der globe gaat, en tevens op den cirkel loodregt ſtaat, en eene regte lijn door twee punten, of door

een

een punt en eenen loodregten ſtand bepaald is, volgt, *dat, wanneer van deze vijf voorwaarden, namelijk het gaan door deze vier punten en den loodregten ſtand, er twee plaats hebben, de andere drie hieruit volgen.* De lijn bij voorbeeld, die door het middenpunt der globe, en het middenpunt van den cirkel gaat, gaat ook door de polen van den cirkel en ſtaat op denzelven loodregt. Hieruit volgt ook, *dat de vijf voorwaarden, dat een cirkel door het middenpunt der globe, door het middenpunt en de twee polen van den cirkel gaat en op den cirkel loodregt ſtaat, in zoodanig eene betrekking tot elkander ſtaan, dat, wanneer twee van dezelve plaats hebben; de drie andere daaruit volgen.* Indien dus b. v. een groote cirkel op eenen anderen cirkel loodregt ſtaat, gaat hij door deszelfs polen en middenpunt, en deelt hem dus midden door. Zoo ook is elke cirkel, die door de polen van eenen anderen cirkel gaat, een groote cirkel, ſtaat loodregt op denzelven, en deelt hem midden door.

7. *Een punt der as van eenen cirkel ſtaat op gelijken afſtand van alle punten van den omtrek des cirkels. Al de bogen van groote cirkels, getrokken tuſſchen den omtrek van eenen cirkel en deszelfs pool, zijn even groot.* Zoo is b. v. $BP = PE$, indien P de pool is van den cirkel BE. Indien deze boog is ϕ, dan is de radius van den cirkel of $BC = ſin.\ \phi$, zijnde de radius der globe de eenheid. Indien dus de

de cirkel een groote cirkel is, dan is $\phi = 90°$, of de bogen tusſchen den pool, en den omtrek van dezen cirkel zijn 90°.

8. *Wanneer twee groote cirkels op eenen anderen loodregt ſtaan, dan zullen derzelver omtrekken zich in de polen van dien cirkel ſnijden.* Indien dus de groote cirkels PAP' en PFP' op de cirkels, BE, AF, DG loodregt ſtaan dan zijn P en P' de polen dezer drie cirkels.

9. Trek uit het punt P de tangenten $\mathcal{J}P$ en HP der bogen PE en PB, dan ſtaan dezelve loodregt op de as Pp dus is $\mathcal{J}P$ aan Fm en HP aan Am evenwijdig, derhalve is $\angle AmF =$ boog $AF = \angle HP\mathcal{J}$, dat is, de hoek der cirkelvlakken PB en PE of de kromlijnige hoek BPE, *bolvormige* genoemd, is de hoek der vlakken, en gelijk aan den boog AF. *Indien men dus de twee beenen van eenen bolvormigen hoek verlengt tot* 90°, *en door de uiteinden eenen boog trekt van eenen grooten cirkel, dan zal die boog de maat zijn van dien hoek.* De cirkel AFa gaat door de polen van deze twee zich ſnijdende cirkels. Indien dus deze twee polen zijn K en L dan is $AK = FL = 90°$; dus $KL = AF$, dat is: *deze hoek van twee cirkels is ook gelijk aan den afſtand van derzelver polen.*

89.

BOLVORMIGE DRIEHOEK.

Dit zal ophelderen hetgene wij bl. 199 gezegd hebben van den bolvormigen driehoek.

Maak (fig. 26 bl. 197) $AM = MB = MC$ en trek uit M met den radius AM, de drie bogen AB, BC, AC dan zullen dezelve bogen zijn van groote cirkels op de oppervlakte eener globe, waarvan het middenpunt is m en de radius $= AM$. Dezen kromlijnigen driehoek noemt men *eenen bolvormigen driehoek*, waarvan de zijden de hoeken der ribben, of doorsneden meten, terwijl de hoeken van dezen driehoek de hoeken der vlakken zijn. Wanneer wij dus de hoeken door de letters A, B, C aanwijzen, en de tegenoverstaande zijden door de kleine letters a, b, c, dan zijn de in § 71 gevondene vergelijkingen *de vergelijkingen voor dezen driehoek. Indien dus van dezen driehoek drie dingen, dat is hoeken of zijden, gegeven zijn, kunnen de overige drie gevonden worden.*

90.

TOEPASSING OP DE HEMELGLOBE.

Indien wij door *afstanden van twee hemelligchamen van elkander* niet anders verstaan, dan den gezigtshoek, in ons oog gevormd door de stralen van die

ligchamen komende, dan kunnen wij, ten aanzien van dien afſtand, al de hemelligchamen beſchouwen, als op de oppervlakte van eenen bol zich bevindende, waarvan het middenpunt ons oog is. Bij de vaste ſterren is het uit hoofde van derzelver *wezenlijken*, of *regtlijnigen* grooten afſtand van ons onverſchillig, of dit middenpunt ons oog zij, of het middenpunt der aarde, zoodat het oog van elken waarnemer op de aarde dit middenpunt van den hemelbol is. Bij de ligchamen tot ons zonneſtelſel behoorende maakt dit eenig verſchil, hetgene bij de maan het grootſte is. Ook de refractie of *breking der lichtſtralen* heeft invloed op dien afſtand; weshalve men *ware en ſchijnbare afſtand of gezigtshoek* onderſcheidt. Een bol, op welks oppervlakte de vaste ſterren volgens de ware gezigtshoeken geplaatst zijn, noemt men eene *hemelglobe*. Wanneer dus uit het middenpunt van de globe twee lijnen naar twee ſterren op derzelver oppervlakte getrokken zijn, *dan zal de hoek, welken zij maken, de ware gezigtshoek zijn, onder welken wij die twee ſterren ſteeds aan den hemel zien*, (de zeer kleine veranderingen, uit de ware of ſchijnbare beweging eener ſter voortkomende, niet in aanmerking genomen zijnde).

Indien dus *A*, *B*, *C* (fig. 28 bl. 229) drie ſterren zijn op de oppervlakte der globe, zullen de bogen *AB*, *AC*, *BC* van groote cirkels derzelver afſtanden van elkander in graden aanwijzen. De afſtand tuſſchen eene ſter, of

een punt der oppervlakte van de globe, en tusſchen eenen cirkel, is de boog van eenen grooten cirkel, uit die ſter of uit dat punt loodregt op dien cirkel getrokken, waartoe dus vereischt wordt, dat die boog verlengd zijnde door de polen van dien cirkel gaat.

De groote cirkels, welke op de hemelglobe door hunne ſnijding de meest gewigtige bolvormige driehoeken vormen, zijn de *aequator*, de *ecliptica*, de *declinatie-*, *breedte- en hoogte-cirkels* eener ſter, de *horizon* en *meridiaan* van eene plaats der aarde, en de *colurus der zonneſtilſtanden*. De polen van den aequator liggen in de verlengde as der aarde. In dezelve ſnijden zich alle meridianen en declinatie-cirkels, welke daarom op den aequator loodregt ſtaan, terwijl de bogen van den aequator de hoeken meten, welke zij met elkander maken. In de polen der ecliptica ſnijden zich alle breedte cirkels, welke daarom op dezelve loodregt ſtaan, terwijl hunne onderlinge hoeken door bogen der ecliptica gemeten worden. De afſtand van den pool der ecliptica en des aequators is de hoek, onder welken deze twee cirkels elkander ſnijden; welken hoek men *de ſchuinsheid der Ecliptica* noemt, en welke thans ten naaste bij 23° 27′ 46″ bedraagt. De *polen van den horizon* eener plaats, zijn derzelver *zenith* en *nadir* (top- en voetpunt) en gelegen in den verlengden radius der aarde, die door de plaats gaat. In deze polen ſnijden zich de meridiaan, en de hoogtecirkels van die plaats, welke daarom op den horizon

zon loodregt ſtaan, terwijl hunne hoeken door bogen van den horizon gemeten worden. *De polen van den meridiaan*, het *Oosten* en het *Westen* genoemd, zijn de ſnijpunten van den horizon en aequator. De meridiaan eener plaats ſtaat dus op beide cirkels loodregt, en meet derzelver hoek. *De polen van den colurus der zonneſtilſtanden* zijn de ſnijpunten van den aequator en de ecliptica (genoemd de *Lente- en Herfſtſnede*). Deze colurus ſtaat dus op beide deze cirkels loodregt, en meet den hoek van dezelven. De twee ſnijpunten van den meridiaan en van den horizon zijn het *Noorden* en *Zuiden*, welke dus van het *Oosten* en *Westen* 90° afſtaan.

De afſtanden eener ſter van den horizon, aequator en ecliptica noemt men *hoogte*, *declinatie* en *breedte van de ſter*. Indien men $90° \pm a$ het complement van den boog a noemt, dan zijn de afſtanden eener ſter van de polen dezer cirkels *het complement van derzelver hoogte, declinatie en breedte*. Men gebruikt $90° - a$ indien de ſter ligt tuſſchen den cirkel en deszelfs pool, $90° + a$, indien de cirkel ligt tuſſchen den pool en de ſter.

Eene ſter heeft *noordelijke of zuidelijke declinatie*, indien haar afſtand van den noordpool des aequators kleiner of grooter is dan 90°. Zoo ook heeft dezelve noordelijke of zuidelijke breedte, indien haar afſtand van den noordpool der ecliptica (dat is die pool, welke het naast bij den noordpool des aequators

is) kleiner of grooter is dan 90°. Indien de afſtand eener ſter van het zenith is $90°+a$, dan wordt a genoemd derzelver *diepte onder den horizon* (depresſio).

Regte opklimming eener ſter is een boog van den aequator bevat tusſchen het punt der Lenteſnede en den declinatie-cirkel eener ſter. Gewoonlijk wordt dezelve in tijd uitgedrukt, 15° gerekend op een uur dus 1° op 4 minuten tijds. Daarentegen is *lengte eener ſter* een boog van de ecliptica bevat tusſchen het punt der Lenteſnede en den breedte-cirkel van die ſter.

Hier is verwarring in de benaming ontſtaan, dewijl men op de aardglobe lengte en breedte in eene andere beteekenis neemt, dan op de hemelglobe. *Breedte van eene plaats der aarde* is derzelver afſtand van den aequator, terwijl *lengte* de hoek is, welken de meridiaan van eene plaats met den eerſten meridiaan maakt; welke hoek dus door den boog van den aequator gemeten wordt.

Wanneer op eene aardglobe het punt der Lenteſnede zoodanig genomen is, dat door hetzelve *de eerſte meridiaan* gaat, dan is op dezelve breedte en lengte, hetgene op de hemelglobe is declinatie en regte opklimming.

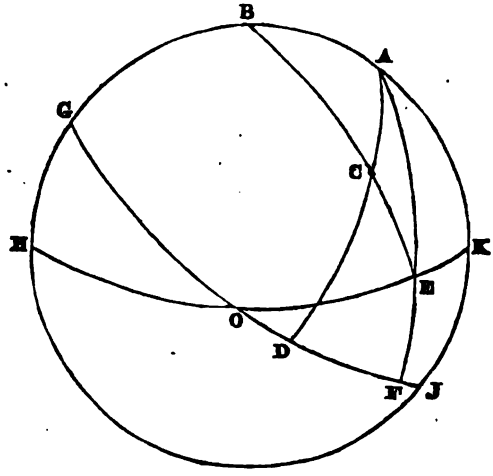
Overigens, dewijl de breedte eener plaats in hoeken of graden wordt uitgedrukt, is het dus hetzelfde, of hiertoe een boog van den meridiaan der aardglobe of van de hemelglobe gebruikt wordt. Dus is de breedte eener

plaats

plaats der aarde, de *boog van den meridiaan der hemelglobe tusschen het zenith van de plaats en den aequator gelegen.*

Hetgene gezegd is, zal toereikende zijn om de volgende voorbeelden van bolvormige driehoeken op eene hemel- en aardglobe te verstaan, waartoe wij dezelfde figuur zullen gebruiken.

Fig. 28.



1. Zij (fig. 28) *A* de pool van den aequator, *B* het zenith eener plaats, en *C* eene ster, dan is *ABGH* de meridiaan der plaats, *ACD* de declinatie-cirkel en *BCE* de hoogte-cirkel der ster, welke door hunne snijding den driehoek *ABC* voortbrengen, waarin

AB is het complement der breedte van de plaats, en BC en AC de complementen der hoogte en der declinatie der ſter zijn. De hoeken A, B, C worden de *uurhoek*, *het azimuth* en *de parallactiſche hoek* der ſter genoemd. Door den uurhoek bepaalt men onmiddelijk den tijd van den dag, indien C de zon is. Indien C niet de zon is, moet men hiertoe nog gebruiken het verſchil van regte opklimming der ſter en der zon. Indien $G\gamma$ de aequator, en HK de horizon is, dan is CD de declinatie, CE de hoogte der ſter, de uurhoek CAB is gelijk aan den boog GD, en het azimuth ABC is gelijk aan den boog EK. Het ſnijpunt O is het Oosten of Westen.

Men kan dus b. v. den uurhoek berekenen uit de breedte der plaats, declinatie en hoogte; de breedte der plaats uit den uurhoek, de declinatie en hoogte, enz.

2. Indien de ſter zich in E bevindt, waar zij dus *opkomt of ondergaat*, dan ontſtaat de driehoek BEA waarin $BE = 90°$. In plaats van dezen kan men den regthoekigen driehoek OFE gebruiken, gevormd door den horizon, den aequator en den declinatie-cirkel der ſter.

Hierin is de hoek $O = GH = 90° - BG$ of het *complement der breedte van de plaats;* de hoek F is $90°$, de ſchuinſche zijde OE (*oostelijke of westelijke amplitudo* genoemd) is het *complement van het Azimuth* EK; de regthoekzijde EF is de declinatie der ſter

en

en OF (*ſchuinſche opklimming* genoemd) is $= GF - GO = LBAE - 90°$, waardoor dus de uurhoek gevonden wordt.

Men kan dus b. v. uit de breedte eener plaats, en uit de declinatie der zon, den tijd van derzelver op- en ondergang berekenen.

3. Zij A de pool van den *aequator*, B de *pool der Ecliptica* en C eene *ſter*, dan is $ABG\gamma$ de colurus der zonneſtilſtanden, ACD een declinatie-cirkel en BCE een breedte-cirkel, welke door hunne ſnijding den driehoek ABC vormen, waarin AB is de ſchuinsheid der ecliptica $= 23° 27' 47''$, AC het complement der declinatie en BC het complement der breedte van de ſter. Indien $G\gamma$ de aequator en HK de ecliptica is, dan is CD de declinatie, en CE de breedte der ſter. Indien de lengte gerekend wordt van het punt O naar K heen, dan is O de *lentesnede*; $LBAC = GD = GO + OD = 90° +$ regte opklimming; $LABC = EK = 90° - OE = 90° -$ lengte. De hoek BCA wordt genoemd *de hoek van poſitie*. De declinatie en regte opklimming der ſterren kunnen door waarnemingen gevonden worden. De breedte en lengte daarentegen kunnen niet waargenomen, maar moeten door berekening gevonden worden. Men vindt dus dezelve uit de bekende ſchuinsheid der ecliptica, en uit de declinatie en regte opklimming.

4. Indien de ſter in E is, bevindt zij zich in de

ecliptica, waarin de zon altijd is. Laat dus de zon in E zijn, dan is in den driehoek BAE de zijde $BE = 90°$; doch in plaats van dezen driehoek kunnen wij, zoo als te voren, den regthoekigen driehoek OFE gebruiken, waarin de hoek F een regte hoek is, de hoek O is 23° 27′ 47″, EF is de declinatie en OF de regte opklimming der zon, terwijl de schuinsche zijde OE de lengte is.

Men kan dus uit de bekende schuinsheid der ecliptica de lengte en regte opklimming der zon vinden, indien de declinatie bekend is — of ook de declinatie of regte opklimming vinden, indien de lengte bekend is.

5. Laat B en C twee sterren zijn, en BC een boog van eenen grooten cirkel, welke dus haar afstand of gezigtshoek is.

Indien nu A de pool is van den aequator, dan zijn AB en AC de complementen der declinatiën dezer sterren, $G\gamma$ is de aequator en O de Lentesnede. Den hoek BAC vindt men door het verschil van derzelver regte opklimming. Indien namelijk R en r de regte opklimming der sterren B en C is, dan is $R = 360° - OG$ en $r = OD$

dus $R - r = 360° - OG - OD = 360° - LBAC$

of $LBAC = 360° - (R - r)$.

Indien A de pool is van de ecliptica, dan zijn AB en AC de complementen der breedte van deze sterren; $G\gamma$ is de ecliptica. De hoek BAC is op

ge-

gelijke wijze als bij de regte opklimming $= 360° -$ verſchil van lengte der twee ſterren.

Indien A het zenith eener plaats is, dan zijn AB en AC de complementen der hoogte van deze ſterren. $G\mathcal{J}$ is de horizon, en de hoek BAC is $= G\mathcal{J} - D\mathcal{J}$ of het verſchil der Azimuthen.

Men kan dus de afſtanden van twee hemelligchamen berekenen:

1, uit derzelver regte opklimmingen en declinatiën,

2, uit derzelver lengten en breedten,

3, uit derzelver hoogten en Azimuthen, terwijl men omgekeerd uit derzelver hoogten en afſtand, het verſchil van derzelver Azimuthen kan berekenen.

Stellen wij, dat de aarde bolrond zij, dan biedt ons dezelve ook voorbeelden aan van bolvormige driehoeken, zoo als:

6. Indien C en B twee plaatſen der aarde zijn, en A de pool der aarde is, dan zijn AC en AB de complementen der breedte van die plaatſen, terwijl CB derzelver afſtand in graden is, welke gemakkelijk tot mijlen of ellen kan herleid worden. Men rekent namelijk op eenen graad 15 duitſche mijlen of 20 hollandſche mijlen (uur gaans) of 25 franſche mijlen, of 111 112 nieuwe ellen of meters.

De hoek A is het verſchil der lengte van die twee plaatſen, de hoek B is het Azimuth van C uit de plaats B gezien, en even zoo is de hoek C het Azimuth van B uit de plaats C gezien.

Men kan dus uit de lengte en breedte van twee plaatſen der aarde derzelver afſtand berekenen, alsmede ook het Azimuth van elke plaats, op de andere plaats gezien.

7. Indien A, C, B drie plaatſen der aarde zijn, dan zijn AC, CB, AB derzelver afſtanden van elkander, terwijl elke hoek, zoo als A het verſchil is der Azimuthen van de twee plaatſen B en C gezien in A.

De bijzonderheden, welke bij deze berekening moeten opgemerkt worden, gaan wij hier voorbij, daar wij alleen eene zeer beknopte beſchouwing wilden geven van den aard en het gebruik der bolvormige driehoeken.

91.

GELIJKVORMIGHEID DER PLATVLAKKIGE LIGCHAMEN, EN DER GEBROKENE FIGUREN, BINNEN WELKE DEZELVE BESLOTEN ZIJN.

Twee regtlijnige platte figuren zijn gelijkvormig, indien de twee gebrokene lijnen, welke derzelver omtrekken zijn, gelijkvormig zijn, en omgekeerd, indien deze figuren gelijkvormig zijn, zijn ook die twee lijnen gelijkvormig. (§ 54, bl. 170).

Hetzelfde geldt van de *ligchamen*, en van de, hen influitende, gebrokene figuren. *Indien deze gebrokene figuren gelijkvormig zijn, zijn ook de ligchamen*

men gelijkvormig, en omgekeerd, indien de ligchamen gelijkvormig zijn, zijn ook die figuren gelijkvormig. Wij behoeven dus alleen de voorwaarden der gelijkvormigheid der ligchamen te beſchouwen, dewijl, hetgene van deze geldt, ook van de inſluitende figuren moet gelden.

92.

GELIJKVORMIGHEID DER PLATVLAKKIGE LIGCHAMEN.

Wanneer wij ons houden aan de algemeene bepaling van gelijkvormigheid van meetkundige grootheden, gegeven § 51, bl. 166, dan geldt de volgende bepaling.

Twee platvlakkige ligchamen zijn gelijkvormig, wanneer het eene zoodanig, in de voorſtelling, kan geplaatst worden, dat de grensvlakken, de ribben en diagonalen van hetzelve evenwijdig zijn aan de overeenkomſtige grensvlakken, ribben en diagonalen van het andere ligchaam, of dat deze gedeeltelijk evenwijdig zijn, en gedeeltelijk op elkander vallen. Van dit laatſte geeft ons een voorbeeld eene pyramide, door een vlak evenwijdig aan de baſis geſneden, waar alsdan de afgeſneden pyramide aan de geheele pyramide gelijkvormig is.

93.

GEVOLGEN.

Uit de evenwijdigheid der ribben en diagonalen, welke de grensvlakken bepalen, volgt, dat de overeenkomſtige hoeken, welke dezelve vormen, in beide ligchamen gelijk zijn (§ 32. 9 bl. 93) en dat de grensvlakken dus gelijkvormig zijn (§ 53, 54). Hieruit volgt ook de evenwijdigheid dezer grensvlakken, want indien de beenen van eenen hoek evenwijdig zijn met de beenen van eenen anderen hoek in een ander vlak liggende, dan is het vlak, door de beenen van den eerſten hoek bepaald, evenwijdig aan het vlak door de beenen van den tweeden hoek bepaald. Hieruit blijkt:

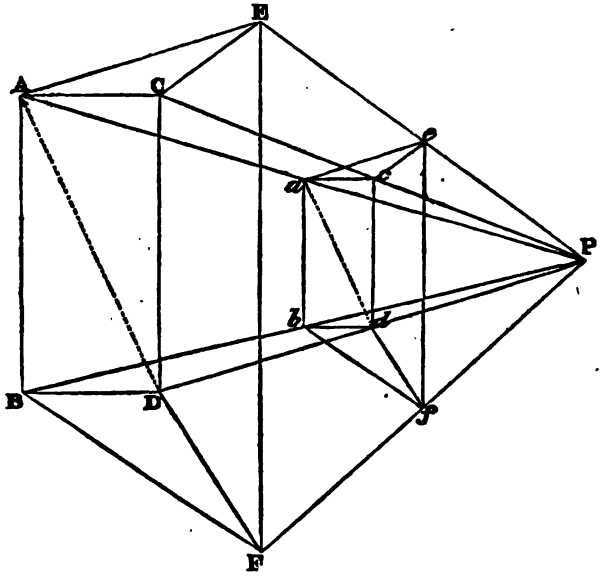
1. *Twee platvlakkige ligchamen zijn gelijkvormig, indien dezelve zoodanig, in de voorſtelling, kunnen geplaatst worden, dat de ribben en diagonalen op de oppervlakte van het eene ligchaam evenwijdig zijn aan de overeenkomſtige ribben en diagonalen op de oppervlakte* van het *andere ligchaam, of ook, dat zij gedeeltelijk op dezelve vallen, en gedeeltelijk aan dezelve evenwijdig zijn.*

Immers zijn in dit geval ook de grensvlakken evenwijdig, of zijn gedeeltelijk evenwijdig, en vallen gedeeltelijk op elkander.

2. *Van twee gelijkvormige platvlakkige ligchamen zijn dus de overeenkomſtige grensvlakken gelijkvormig, en de overeenkomſtige ribben en diagonalen evenredig.*

3. *Indien van twee gelijkvormige ligchamen eene rib of diagonaal van het eene ligchaam gelijk is aan eene overeenkomſtige rib of diagonaal van het tweede dan zijn deze ligchamen door gelijke en gelijkvormige grensvlakken ingeſloten, en dus volkomen gelijk.*

Fig. 29.



4. Dewijl (fig. 29) de lijn *ce*, welke twee zijden van eenen driehoek *PEC* in deelen verdeelt, welke evenredig zijn aan die zijden (*Pe*: *PE* = *Pc*: *PC*), evenwijdig aan de derde zijde *CE* is, volgt hieruit, dat men een platvlakkig ligchaam *abcdef* kan vervaardigen, hetgene

gene gelijkvormig is aan een ander platvlakkig ligchaam $ABCDEF$. Men trekt namelijk uit een punt naar welgevallen genomen lijnen naar al de toppen van dat ligchaam, neemt van elk dezer lijnen een bepaald gedeelte $\frac{n}{m}$, vereenigt de verdeelpunten door regte lijnen, en laat door die lijnen vlakken gaan. Alsdan ontstaat een ligchaam $abcdef$, hetgene gelijkvormig is aan het ligchaam $ABCDEF$ omdat de overeenkomstige ribben en diagonalen evenwijdig zijn.

Immers is $\frac{m}{n} = \frac{PC}{Pc} = \frac{PA}{Pa} = \frac{PB}{Pb}$ enz.

Dus is ce evenwijdig aan CE, ca aan CA, cb aan CB, ad aan AD enz.

5. *Indien eene pyramide door een vlak evenwijdig aan de basis gesneden wordt, dan is het afgesneden stuk, waarin de top der pyramide is, gelijkvormig aan de geheele pyramide.*

Immers zijn de overeenkomstige ribben, welke niet op elkander vallen, evenwijdig, omdat de vlakken evenwijdig zijn, want de doorsneden van twee evenwijdige vlakken zijn evenwijdig (bl. 195). Om dezelfde redenen zijn ook de overeenkomstige diagonalen evenwijdig.

94.

GELIJKSOORTIGHEID DER GELIJKVORMIGE PLATVLAKKIGE LIGCHAMEN.

Uit de bepaling van gelijkvormigheid volgt, dat twee ligchamen niet gelijkvormig kunnen zijn, indien zij niet gelijkſoortig zijn.

Twee platvlakkige ligchamen zijn gelijkſoortig, indien dezelve een gelijk getal van grensvlakken, van toppen, van ribben, en van hoeken der ribben op de oppervlakte hebben. Men zie bl. 205. Zoo zijn b. v. alle n hoekige pyramiden gelijkſoortig, want zij hebben $n+1$ grensvlakken, $n+1$ toppen, $2n$ ribben en $4n$ hoeken. Alle n hoekige prisma's zijn gelijkſoortig, want zij hebben $n+2$ grensvlakken, $2n$ toppen, $3n$ ribben en $6n$ hoeken.

Maar *deze vier getallen ſtaan in betrekking tot elkander, zoodat twee van dezelve door de twee anderen bepaald worden.* Want zij G het getal der grensvlakken, T het getal der toppen, R dat der ribben en H het getal van de hoeken der ribben, dan is

$G + T = R + 2$ en $H = 2R$.

De waarheid der vergelijking $H = 2R$ blijkt terſtond, omdat elke rib in twee grensvlakken voorkomt, en dus tot twee hoeken behoort. De vergelijking $G + T = R + 2$ is door EULER gevonden en be-

we-

wezen. Ook hebben naderhand LEGENDRE en CAUCHY daarvan bijzondere bewijzen gegeven.

Dewijl er dus twee vergelijkingen zijn tusschen R, G, T en H, kunnen dus uit twee van deze grootheden de overige bepaald worden. Wij kunnen dus ook deze bepaling van gelijkſoortigheid der platvlakkige ligchamen geven:

Twee platvlakkige ligchamen zijn gelijkſoortig, indien zij een gelijk getal van ribben en grensvlakken, of een gelijk getal van toppen en grensvlakken, of een gelijk getal van toppen en ribben hebben.

95.

AANMERKING.

De vergelijking $G+T=R+2$ geeft merkwaardige beſluiten, aangaande de betrekking der drie getallen G, T, R, waarvan wij hier eenige zullen mededeelen.

Stel dat op de oppervlakte van het ligchaam zijn g''' driehoeken, g^{IV} vierhoeken g^{V} vijfhoeken enz., en voorts, dat er zijn t''', t^{IV}, t^{V} enz. toppen, rondom welke drie, vier, vijf, enz. hoeken der ribben zijn, dan is

1. $G=g''' + g^{IV} + g^{V} + g^{VI} + \ldots$
2. $T=t''' + t^{IV} + t^{V} + t^{VI} + \ldots$
3. $R=\frac{1}{2}H=\frac{3.g''' + 4.g^{IV} + 5.g^{V} + 6.g^{VI}, \text{ enz.}}{2}$

$$=\frac{3\,t''' + 4\,t^{IV} + 5\,t^{V} + \text{enz.}}{2}$$

4. Hieruit en uit de vergelijking $R + 2 = T + G$ volgt:

$4 + g'' + 2g^{iv} + 3g^{v} + 4g^{vi} + \ldots$
$= 2(t'' + t^{iv} + t^{v} + \ldots)$
$2(g''' + g^{iv} + g^{v} + \ldots) = 4 + t''' + 2t^{iv} + 3t^{v} + \ldots$

5. Indien het ligchaam bloot door driehoeken ingesloten, en dus $G = g'''$ is, dan is $\frac{4 + g''}{2} = t''' + t^{iv} + \ldots$,

waaruit volgt, dat g'', of het getal der driehoeken noodzakelijk een even getal is. Hetzelfde geldt van vijfhoeken, zevenhoeken enz. *Indien dus een platvlakkig ligchaam door louter veelhoeken van $2n+1$ zijden is ingesloten, kan het getal dezer veelhoeken niet oneven zijn.* Er kan dus geen platvlakkig ligchaam zijn, hetwelk ingesloten is door louter $3, 5, 7, 9 \ldots 2n+1$ driehoeken, of vijfhoeken of zevenhoeken enz.

Indien dus een platvlakkig ligchaam door m veelhoeken van een even getal zijden, en door n veelhoeken van een oneven getal zijden is ingesloten, dan moet n altijd een even getal zijn.

6. $R - \frac{2}{3}G = \frac{1}{3}g^{iv} + g^{v} + \frac{2}{3}g^{vi} + 2g^{vii} + \ldots$.

Indien dus het ligchaam alleen door driehoeken is ingesloten, dan is $R = \frac{2}{3}G = \frac{2}{3}g''' = 3T - 6$. Dus is $T = \frac{1}{3}G + 2 = \frac{1}{3}R + 2$ en $G = \frac{3}{2}R = 2T - 4$.

Maar indien het ligchaam niet bloot door driehoeken is ingesloten, dan is R grooter dan $\frac{2}{3}G$, of G is kleiner dan $\frac{3}{2}R$. Dus is alsdan $T - 2 = R - G$ grooter dan $\frac{1}{2}G$, of T is grooter dan $\frac{1}{2}G + 2$ en G kleiner dan $2T - 4$.

R is kleiner dan $3T-6$ en T is grooter dan $\frac{1}{3}R+2$.

7. $R-\frac{2}{3}T=\frac{1}{3}t''+t^{v}+\frac{2}{3}t^{v}+\ldots$

Indien dus rondom elken top drie hoeken zijn, dan is $R=\frac{2}{3}T=\frac{2}{3}t'''=3G-6$ en $T=2G-4=\frac{2}{3}R$ en $G=\frac{1}{2}T+2=\frac{1}{3}R+2$.

Maar indien niet rondom elken top drie hoeken zijn, dan is R grooter dan $\frac{2}{3}T$ of T kleiner dan $\frac{3}{2}R$. Dus $R-T=G-2$ is grooter dan $\frac{1}{3}T$, of T is kleiner dan $2G-4$ en G grooter dan $\frac{1}{2}T+2$.

Voorts is $R-G=T-2$ kleiner dan $2G-6$; dus R kleiner dan $3G-6$, en G grooter dan $\frac{1}{2}R+2$.

8. Uit 6 en 7 kunnen wij de limieten bepalen, binnen welke G, T en R besloten zijn; namelijk:

G	niet grooter dan	$\frac{2}{3}R$,		en niet kleiner dan	$\frac{1}{2}R+2$
G	„	„	„ $2T-4$	„	„	„ $\frac{1}{2}T+2$
R	„	„	„ $3G-6$	„	„	„ $\frac{2}{3}G$
R	„	„	„ $3T-6$	„	„	„ $\frac{2}{3}T$
T	„	„	„ $2G-4$	„	„	„ $\frac{1}{2}G+2$
T	„	„	„ $\frac{2}{3}R$	„	„	„ $\frac{1}{2}R+2$

9. Indien S is de som van alle hoeken, dan is $S=(2g'''+4g^{v}+6g^{v}+8g^{v}\ldots.)$ regte hoeken, maar $4(R-G)=4T-8=2g'''+4g^{v}+6g^{v}\ldots.$ dus bedraagt de som der hoeken zoo vele regte hoeken als er eenheden zijn in $4T-8$ of in $4(R-G)$.

10. Door middel der vergelijkingen bij N°. 4, kan men bepalen, welke platvlakkige ligchamen al dan niet mogelijk zijn, gelijk eenige voorbeelden zullen aanwijzen.

a. Men vraagt, *welke zijn de mogelijke platvlak-*

vlakkige ligchamen, waarvan de grensvlakken louter drichoeken zijn, terwijl er aan elken top drie ribben en dus drie hoeken der ribben zijn.

Hier is $G = g'''$ en $T = t'''$

dus $4 + g''' = 2\,t'''$ en $2\,g''' = 4 + t'''$

dus $g''' = 4$ en $t''' = 4$; en $R = G + T - 2 = 6$.

Er is dus slechts *een* zoodanig ligchaam, besloten door 4 driehoeken, hebbende 4 toppen en 6 ribben, hetgene dus eene *driehoekige pyramide* is.

b. Men vraagt, *welke zijn de mogelijke platvlakkige ligchamen, waarvan de grensvlakken louter vierhoeken zijn, terwijl er aan elken top drie hoeken der ribben zijn.*

Hier is $G = g^{iv}$ en $T = t'''$

dus $4 + 2\,g^{iv} = 2\,t'''$ en $2\,g^{iv} = 4 + t'''$

dus $t''' = 8$ en $g^{iv} = 6$.

Er is dus slechts *een* zoodanig ligchaam, besloten door 6 vierhoeken, hebbende 8 toppen en dus 12 ribben.

c. Men vraagt, *welke zijn de mogelijke platvlakkige ligchamen, waarvan de grensvlakken louter vijfhoeken zijn, terwijl er aan elken top drie hoeken der ribben zijn.*

Hier is $G = g^{v}$ en $T = t'''$

dus $4 + 3\,g^{v} = 2\,t'''$ en $2\,g^{v} = 4 + t'''$

dus $g^{v} = 12$, $t''' = 20$.

Er is dus slechts *een* zoodanig ligchaam besloten

ten door 12 vijfhoeken, hebbende 20 toppen en dus 30 ribben.

d. Men vraagt, welke zijn de mogelijke platvlakkige ligchamen, ingesloten door veelhoeken, welke allen meer dan 5 zijden hebben.

Hier is $4+4g^{v}+5g^{v'}+6g^{v''}+\ldots$
$=2t''+2t^{iv}+2t^{v}+2t^{vi}+\ldots.$
en $2g^{v}+2g^{v'}+2g^{v''}+\ldots$
$=4+t''+2t^{iv}+3t^{v}+4t^{vi}+\ldots.$
dus $4g^{v}+4g^{v'}+4g^{v''}+\ldots$
$=8+2t''+4t^{iv}+6t^{v}+8t^{vi}+\ldots.$
indien men deze vergelijking van de eerste aftrekt, krijgt men
$12+g^{v''}+2g^{v'''}+\ldots=-(2t^{iv}+4t^{v}+6t^{vi}+\ldots)$
Dewijl intusschen noch g noch t negatief kan zijn, bestaat er zoodanig een platvlakkig ligchaam niet.

e. Welke zijn de mogelijke platvlakkige ligchamen, ingesloten door regelmatige veelhoeken van slechts twee soorten.

Laat de veelhoeken zijn A en A', hun getal M en M', het getal der zijden van elken veelhoek m en m', terwijl p en p' aanwijzen, hoeveel hoeken van A en A' bij elken top voorkomen, dan is

$$Mm=Tp,\ M'm'=Tp',\ G=M+M'=T\left(\frac{p}{m}+\frac{p'}{m'}\right)$$

$R=\left(\frac{p+p'}{2}\right)T$. Dewijl nu $R-G=T-2$ heeft men

men $Tp\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)+Tp'\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m'}\right)=T-2$

dus $T=\frac{4\,m\,m'}{2\,m\,m'-p\,m'\,(m-2)-p'm\,(m'-2)}$.

Opdat het ligchaam mogelijk zij, moeten T, M, M', R, G geheele poſitieve getallen zijn. De kleinſte waarde van $p+p'$ is 3, en de grootſte is 5. Dit volgt, omdat de ſom der hoeken rondom eenen top altijd kleiner is dan 360°, en de hoeken der regelmatige drie-, vier-, vijf-, zeshoeken enz. zijn 60°, 90°, 108°, 120° enz. Hieruit volgt ook, dat wanneer er onder de regelmatige veelhoeken geene driehoeken zijn, $p+p'$ niet grooter dan 3 kan wezen. Uit *d* bl. 244 blijkt, dat m en m' niet beide grooter dan 5 kunnen wezen.

Men vindt hiernaar de volgende mogelijke ligchamen, ingesloten door regelmatige veelhoeken van twee soorten

A	A'	p	p'	Vlakken. G	Toppen. T	Ribben. R
2 Driehoeken	3 Quadraten	1	2	5	6	9
8 »	18 »	1	3	26	24	48
8 »	6 »	2	2	14	12	24
32 »	6 »	4	1	38	24	60
20 »	12 Vijfhoeken	2	3	32	30	60
80 »	12 »	4	1	92	60	150
4 »	4 Zeshoeken	1	2	8	12	18
8 »	6 Achthoeken	1	2	14	24	36
20 »	12 Tienhoeken	1	2	32	60	90
6 Quadraten	8 Zeshoeken	1	2	14	24	36
12 Vijfhoeken	20 Zeshoeken	1	2	32	60	90
Daarenboven is algemeen:						
$2m$ Driehoeken	2 Veelhoeken van m zijde	3	1	$2m+2$	$2m$	$4m$
m Quadraten	2 Veelhoeken van m zijde	2	1	$m+2$	$2m$	$3m$
zoo als b. v.						
8 Driehoeken	2 Quadraten	3	1	10	8	16
10 Driehoeken	2 Vijfhoeken	3	1	12	10	20
5 Quadraten	2 Vijfhoeken	2	1	7	10	15
6 Quadraten	2 Zeshoeken	2	1	8	12	18

96.

OVER DE DRIEHOEKIGE PYRAMIDE.

Hetgene de regtlijnige driehoeken zijn onder de platte figuren, zijn de driehoekige pyramiden onder de platvlakkige ligchamen, en tusſchen beide beſtaan opmerkelijke overeenkomſten, zoo als:

1. Gelijk elke platte figuur in driehoeken, *kan ook elk platvlakkig ligchaam in driehoekige pyramiden verdeeld worden.*

2. Indien de overeenkomſtige driehoeken, waaruit twee platte figuren beſtaan, gelijkvormig zijn, dan zijn ook de figuren gelijkvormig; indien zij volkomen gelijk zijn, dan zijn ook deze figuren volkomen gelijk. *Hetzelfde geldt van twee platvlakkige ligchamen, welke of volkomen gelijk, of ſlechts gelijkvormig zijn, indien de overeenkomſtige pyramiden, waarin zij kunnen verdeeld worden, zulks zijn.*

Gelijk dus de bepaling der voorwaarden, onder welke twee driehoeken of volkomen gelijk of ſlechts gelijkvormig zijn, bij de beſchouwing der platte figuren hoogst gewigtig is, is ook eene gelijkſoortige beſchouwing, ten aanzien van de driehoekige pyramide, voor de leer der platvlakkige ligchamen van zeer veel belang.

Eene nadere aanwijzing hiervan zal dus niet ongepast zijn.

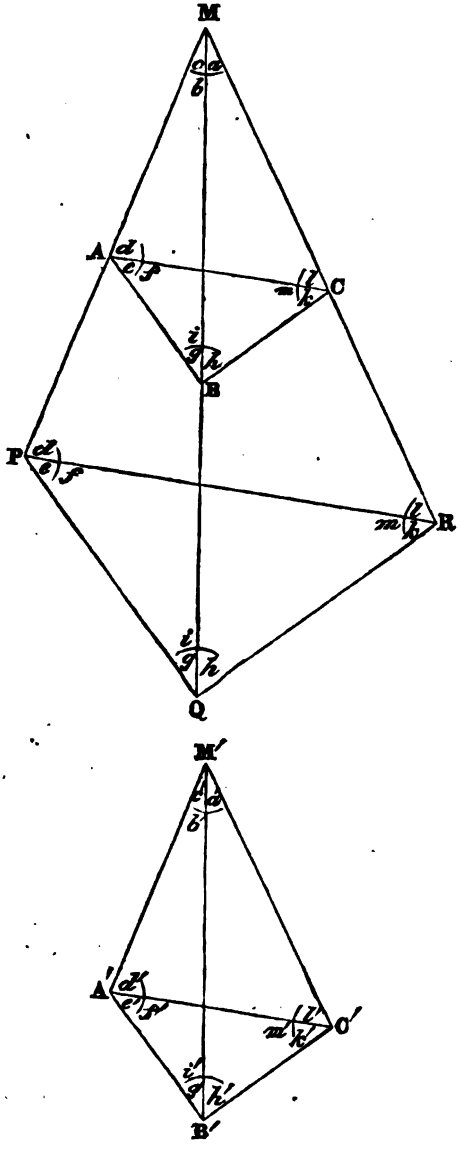
In eene driehoekige pyramide zijn *vier* grensvlak-

ken of driehoeken, *zes* hoeken der vlakken en *twaalf* hoeken der ribben. Omdat men in eenen bolvormigen driehoek door drie hoeken de overige 3 hoeken, en in eenen regtlijnigen driehoek, den eenen hoek door de twee anderen kan vinden, volgt daaruit, dat de 12 hoeken der ribben door de 6 hoeken der vlakken bepaald worden, terwijl van 4 hoeken der ribben, elk door de som van twee anderen tot hetzelfde grensvlak behoorende, bepaald wordt. Men vraagt dus bij deze 18 hoeken, hoeveel hoeken (die niet van elkander zoodanig afhangen, dat men eenen van dezelven door de overigen kan vinden) er vereischt worden, om de overige hoeken te bepalen.

Men moet evenwel hierbij opmerken, dat er zoowel bij de regtlijnige als bolvormige driehoeksmeting twijfelachtige gevallen zijn, voortkomende omdat $\sin A = \sin(180° - A)$. Eene vergelijking, welke $\sin A$ bepaalt, laat het dus onzeker, of men A of deszelfs supplement moet nemen. Dus is de stelling, dat door drie hoeken de overigen gevonden worden, slechts dan algemeen waar, indien men weet, van welke soort de te vinden hoeken zijn.

Fig.

Fig. 30.



Ter duidelijke aanwijzing der hoeken kan ſtrekken fig 30, waar de zijden van de vier bolvormige driehoeken *M*, *A*, *B*, *C*, of de hoeken der ribben zijn aangewezen door de kleine letters *a*, *b*, *c*, *d* . . . *m* terwijl wij, ter aanwijzing van de tegenoverſtaande hoeken der vlakken, de groote letters *A*, *B*, *C*, *D*... *M* zullen gebruiken.

Dus *van den bolvormigen driehoek M is*

a=*LBMC*, en *A* is de hoek der vlakken *AMC* en *AMB*
b=*LAMC*, en *B* „ „ „ „ *AMB* en *BMC*
c=*LAMB*, en *C* „ „ „ „ *AMC* en *BMC*

Van den bolvormigen driehoek A is

d=*LMAC*, en *D* is de hoek der vlakken *MAB* en *CAB*
e=*LCAB*, en *E*=*A* „ „ „ *AMC* en *AMB*
f=*LMAB*, en *F* „ „ „ *MAC* en *CAB*.

Van den bolvormigen driehoek B is

g=*LAMB*, en *G* is de hoek der vlakken *ABC* en *MBC*
h=*LMBC*, en *H*=*D* „ „ „ *MAB* en *CAB*
i=*LABC*, en *J*=*B* „ „ „ *AMB* en *MBC*

Van den bolvormigen driehoek C is

k=*LACB*, en *K*=*C* is de hoek der vlakken *AMC* en *BMC*
l=*LMCA*, en *L*=*G* „ „ „ „ *ABC* en *MBC*
m=*LBCM*, en *M*=*F* „ „ „ „ *MAC* en *CAB*

Wij hebben dus in deze vier bolvormige driehoeken de zes hoeken *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, *G*
aan welke de andere zes hoeken gelijk zijn *E*, *J*, *K*, *H*, *M*, *L*.

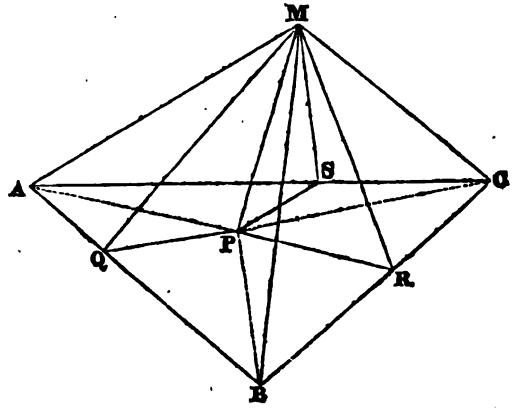
97.

BETREKKING TUSSCHEN DE HOEKEN EENER DRIEHOEKIGE PYRAMIDE.

Al de hoeken van eene driehoekige pyramide, en dus de 12 hoeken der ribben en de 6 hoeken der vlakken, zijn bepaald, indien er 5 bepaald zijn, mits dat er onder deze 5 geen hoek zij, welke door de overige 4 kan gevonden worden.

Dit volgt, omdat in elken bolvormigen driehoek, onder de bl. 248 opgegevene voorwaarde, door drie hoeken de overige drie hoeken bepaald zijn. Men ſtel b. v., dat 5 hoeken der vlakken, namelijk A, B, C, D, F bepaald zijn, dan behoeft ſlechts aangewezen te worden, dat de hoek G door de 5 hoeken A, B, C, D, F bepaald wordt, want uit de zes hoeken der vlakken worden de hoeken der ribben gevonden.

Fig. 31.



Nu

Nu is a, b, c bepaald door A, B, C; e, d, f door A, D, F; g door c, f omdat $g = 180° - (c + f)$. Dus is G bepaald door g, D, B.

Men ſtel, dat er 5 zoodanige hoeken der ribben bepaald zijn, zoo als a, b, c, d, f, dan is A, B, C bepaald door a, b, c; D, F, e door d, f, A. Dus zijn bepaald de 5 hoeken der vlakken, dus ook al de overige hoeken.

Dus zijn ook door vijf zoodanige van elkander onafhankelijke hoeken, welke gedeeltelijk hoeken der vlakken, gedeeltelijk hoeken der ribben zijn, al de hoeken eener driehoekige pyramide bepaald.

Aanmerking. Wanneer men fig. 31 uit M eene loodlijn MP neerlaat op het vlak ABC, en de drie loodlijnen MQ, MR, MS op de zijden AB, BC en AC, dan ſtaan ook QP, PR en PS loodregt op die zijden. Dus is $\angle MQP = D$, $\angle MRP = G$ en $\angle MSP = F$. Voorts is

$$\Delta AMC : \Delta APC = MS : SP = 1 : \cos F$$
$$\Delta AMB : \Delta APB = MQ : PQ = 1 : \cos D$$
$$\Delta MBC : \Delta PCB = MR : PR = 1 : \cos G$$

dus $\Delta APC + \Delta APB + \Delta PCB = \Delta ABC$
$= \Delta AMC \cos F + \Delta AMB \cos D + \Delta MBC \cos G$

Men ſtel dus $\Delta ABC = \alpha$, $\Delta AMC = \beta$ $\Delta AMB = \gamma$, $\Delta MBC = \delta$ dan is

1. $\alpha = \beta \cos F + \gamma \cos D + \delta \cos G$.
2. $\beta = \gamma \cos A + \delta \cos C + \alpha \cos F$.

Op dezelfde wijze vindt men door loodlijnen uit B, A en C op het tegenoverſtaand vlak te trekken.

3. $\gamma = \alpha \cos D + \delta \cos B + \beta \cos A$.

4. $\delta = \alpha \cos G + \gamma \cos B + \beta \cos C$.

Door deze 4 vergelijkingen kan men α, β, γ, δ elimineren, en vindt hierdoor een vergelijking tusſchen de zes hoeken der vlakken. Men kan dus ook op deze wijze door vijf hoeken der vlakken den zesden hoek vinden.

98.

GELIJKVORMIGHEID VAN DRIEHOEKIGE PYRAMIDEN.

Uit het voorgaande volgt: *dat twee driehoekige pyramiden gelijkvormig zijn, indien 5 onafhankelijke hoeken van de eene gelijk zijn aan 5 overeenkomſtige hoeken van de andere.*

Immers zijn alsdan al de hoeken der zijden en vlakken van de eene pyramide gelijk aan de overeenkomſtige hoeken van de andere pyramide.

Maak fig. 30, bl. 249 $MA = M'A'$ en trek door A een vlak evenwijdig aan het vlak PQR, dan is de pyramide $MABC$ gelijkvormig aan de pyramide $MPQR$ en al de overeenkomſtige hoeken zijn in beide even groot. Dus zijn ook in de pyramiden $MABC$ en $M'A'B'C'$ al de overeenkomſtige hoeken even groot en dewijl $MA = M'A'$ zijn al de ribben gelijk. Zij zijn dus door gelijke en gelijkvormige driehoeken inge-

gesloten, en derhalve volkomen aan elkander gelijk. Dewijl dus de pyramide $MABC$ gelijkvormig is aan de pyramide $MPQR$, moet zulks ook de pyramide $M'A'B'C'$ zijn.

99.

GEVOLG I.

Twee driehoekige pyramiden zijn dus gelijkvormig.

1. *Indien drie overeenkomstige grensvlakken of driehoeken, welke de bolvormige driehoeken vormen, gelijkvormig zijn*, zoo als, indien de driehoeken AMB, BMC en AMC aan de driehoeken $A'M'B'$, $B'M'C'$ en $A'M'C'$ gelijkvormig zijn, want in dit geval is $a, b, c, d, f, = a', b', c', d', f'$.

2. *Indien twee overeenkomstige grensvlakken gelijkvormig zijn, en daarenboven een overeenkomstige hoek der vlakken, of ook een hoek der ribben, niet behoorende tot de gelijkvormige grensvlakken, gelijk is.* Zoo b. v., indien fig. 30 ΔMAB aan $\Delta M'A'B'$ en ΔMBC aan $\Delta M'B'C'$ gelijkvormig is, en daarenboven $A = A'$ dan is $c, a, f, h, A = c', a', f', h', A'$.

Intusschen moeten de hieruit te bepalen hoeken gelijksoortig zijn. Indien de gelijke hoek door de overeenkomstige gelijkvormige vlakken is ingesloten, is de bijvoeging dezer voorwaarde niet noodig.

3. *Indien een grensvlak van de eene pyramide gelijkvormig is aan een grensvlak van de andere pyra-*

mi-

mide, en daarenboven drie hoeken van de eene, welke niet van elkander noch van de hoeken van dat grensvlak afhangen, gelijk zijn aan drie overeenkomſtige hoeken van de andere pyramide.

Laat bij voorbeeld ΔMAB aan $\Delta M'A'B'$ gelijkvormig zijn, dan is $c,f = c',f'$, indien dus daarenboven is $A,B,C = A',B',C'$, dan is $c,f,A,B,C = c',f',A',B',C'$.

De hier te bepalen hoeken moeten gelijkſoortig zijn.

4. *Indien drie hoeken van den bolvormigen driehoek M van de eene pyramide, gelijk zijn aan de overeenkomſtige drie hoeken van den bolvormigen driehoek M' van de andere pyramide, en daarenboven 2 hoeken van de eene gelijk zijn aan 2 overeenkomſtige hoeken van de andere, mits geen van deze 5 hoeken door de vier andere bepaald wordt.* De hier te bepalen hoeken moeten gelijkſoortig wezen.

5. Dus ook, *indien zij twee bolvormige driehoeken M en M', A en A' gelijk hebben.*

6. Dus ook, *indien de zes ribben van de eene pyramide in eene ſtandvaſtige rede ſtaan tot de zes overeenkomſtige ribben van de andere pyramide.* Want in dit geval zijn de overeenkomſtige grensvlakken gelijkvormig.

GEVOLG 2.

Twee driehoekige pyramiden zijn volkomen gelijk en gelijkvormig, indien zij 5 onafhankelijke overeen-

eenkomſtige hoeken gelijk hebben, en daarenboven eene overeenkomſtige rib in beide gelijk is, en de te bepalen overeenkomſtige hoeken gelijkſoortig zijn.

Deze volkomen gelijkheid heeft dus plaats in de zes gevallen in het voorgaande gevolg gemeld, indien er als voorwaarde nog bijgevoegd wordt, dat *eene* rib van de eene pyramide gelijk is aan *eene* overeenkomſtige rib van de andere pyramide.

100.

GELIJKVORMIGHEID VAN ANDERE PYRAMIDEN.

Aangaande de pyramiden, welke meer dan drie zijvlakken hebben, kunnen verſchillende voorwaarden van gelijkvormigheid bepaald worden. Zoo als b. v. zijn de volgende ſtellingen, waarvan het bewijs gemakkelijk uit het voorgaande wordt afgeleid.

1. *Twee n hoekige pyramiden zijn gelijkvormig, indien de n zijvlakken van de eene gelijkvormig zijn aan de overeenkomſtige zijvlakken van de andere in dezelfde volgorde genomen.* Zij zijn volkomen gelijk, indien deze overeenkomſtige zijvlakken volkomen gelijk zijn.

2. *Ook zijn dezelve gelijkvormig, indien de n hoeken rondom het toppunt en de 2 n—4 hoeken, welke n—2 van derzelver zijden met de zijden der ba-*

baſis maken in de eene pyramide gelijk zijn, aan de overeenkomſtige hoeken in de andere pyramide.

Zoo zijn b. v. twee driehoekige pyramiden gelijkvormig, indien de drie hoeken der ribben aan een der hoekpunten, en de twee hoeken, welke een der ribben met twee ribben van een ander hoekpunt maakt, in de eene pyramide gelijk zijn aan de overeenkomſtige hoeken in de andere pyramide. Dit volgt ook onmiddellijk uit § 98. Zoo zijn ook twee vierhoekige pyramiden gelijkvormig, indien de 4 hoeken der ribben aan het toppunt en de vier hoeken, welke twee van deze ribben elk met twee ribben der baſis maken, in de eene pyramide gelijk zijn aan de overeenkomſtige hoeken in de andere pyramide.

101.

GELIJKVORMIGHEID DER LIGCHAMEN IN HET ALGEMEEN.

Wij zouden op dezelfde wijze ook de voorwaarde kunnen beſchouwen, onder welke andere ſoorten van ligchamen, zoo als de *prismatiſche* ligchamen, gelijkvormig zijn. Doch hetgene hier geſteld is, zal voldoende zijn tot het oogmerk, om den aard van gelijkvormige ligchamen aan te wijzen. Wij voegen dus hierbij ſlechts nog eenige algemeene ſtellingen.

1. *Twee platvlakkige ligchamen zijn gelijkvormig, indien de inſluitende figuren van het eene gelijkvormig zijn aan de overeenkomſtige figuren van het andere ligchaam.*

2. *Alle regelmatige ligchamen zijn gelijkvormig, indien zij door een gelijk aantal van figuren zijn ingeſloten.*

3. *Indien twee ligchamen door meer dan eene ſoort van regelmatige figuren zijn ingeſloten*, zoo als b. v. diegenen zijn, van welke § 95 bl. 244 gehandeld is, *zullen dezelve gelijkvormig zijn, indien de ſoorten, en het getal van elke ſoort van figuren bij beide ligchamen gelijk zijn, en dezelve op gelijke wijze zijn gerangſchikt.*

4. Voorts kunnen wij uit de bepaling bl. 166, § 51 afleiden.

Indien bij de ſnijding van twee ligchamen A en B door platte vlakken dit beſtendig plaats heeft, dat elke doorſnede van A gelijkvormig is aan eene doorſnede van B, en deze doorſneden door overeenkomſtige punten gaan, dan zijn deze ligchamen gelijkvormig.

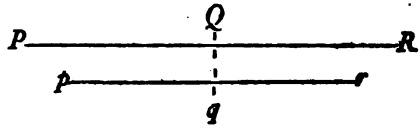
Deze ſtelling geldt van alle ligchamen, hoedanig ook de oppervlakte zijn moge, binnen welke dezelve zijn ingeſloten. Zij geldt dus ook voor kromvlakkige ligchamen.

108.

GEVOLG 1.

Wij kunnen uit de laatſte ſtelling de volgende afleiden, waarin de overeenkomſtige punten nader aangewezen worden.

Men ſtel, dat door twee ligchamen A en B, twee lijnen getrokken zijn, PR en pr.



zoodat P en p, R en r overeenkomſtige punten zijn, en dat er door Q en q, zoodanig genomen, dat $PQ : pq = PR : pr$, vlakken gaan, welke de lijnen PR en pr onder denzelfden hoek ſnijden. *Indien alsdan beſtendig, hoe groot ook PQ en pq zijn mogen, mits dezelve evenredig zijn aan PR en pr, de eene doorſnede gelijkvormig is aan de andere* (§ 57 en § 65, bl. 173, 183), *dan zijn de twee ligchamen, en de figuren, binnen welke zij beſloten zijn, gelijkvormig.*

GEVOLG. 2.

Hieruit volgt wederom:

Wanneer twee gelijkvormige, platte, regtlijnige of kromlijnige figuren door de ronddraaijing rondom aſſen, waarvan de uiteinden overeenkomſtige

punten zijn, ligchamen beſchrijven, dan zullen deze ligchamen en de figuren, binnen welke zij beſloten zijn, gelijkvormig wezen.

Voorbeelden hiervan zijn de ligchamen, beſchreven door de ronddraaijing,

1. *Van twee cirkels rondom derzelver middellijn.*

2. *Van twee gelijkvormige ellipſen rondom derzelver groote of kleine aſſen.*

3. *Van twee gelijkvormige ſegmenten rondom derzelver chorden.*

4. *Van twee regthoekige gelijkvormige driehoeken rondom eene der overeenkomſtige regthoekzijden, en in het algemeen van twee gelijkvormige driehoeken rondom eene der overeenkomſtige zijden.* Overeenkomſtige zijden zijn diegenen, welke tegenover gelijke hoeken ſtaan.

5. *Van twee regthoekige gelijkvormige parallelogrammen, en in het algemeen, van twee gelijkvormige veelhoeken, rondom eene der overeenkomſtige zijden, of rondom eene andere lijn, door overeenkomſtige punten gaande.*

Uit 4 en 5 volgt, dat twee regthoekige kegels en cylinders gelijkvormig zijn, indien de radiën van hunne baſis in dezelfde rede tot elkander ſtaan, als hunne hoogten.

103.

AANMERKING.

Wij hebben bl. 178—184 aangewezen, hoedanig de gelijkvormigheid van kromme lijnen, en van de figuren, welke door dezelve ingefloten zijn, kan bepaald worden, indien er eene vergelijking is tusfchen de abscisfen en ordinaten van deze lijnen. Doch dit geldt alleen van de kromme lijnen, waarvan alle deelen in hetzelfde vlak liggen, of de lijnen *van enkelvoudige kromming*. Bij de kromme lijnen der dubbele kromming (§ 85 bl 211 en 212) komt eene derde ordinaat z, welke aanwijst den afftand van het punt der kromme lijn tot een grondvlak. Opdat twee lijnen van een dubbele kromming gelijkvormig zijn, moet altijd zijn $m = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$; zijnde x, y, z de ordinaten van een punt der eene kromme lijn en x', y', z' die van een overeenkomftig punt der andere kromme lijn. Hetzelfde kunnen wij ftellen aangaande twee kromvlakkige ligchamen, en derzelver oppervlakten. Zij zijn gelijkvormig, indien derzelver oppervlakten gelijkvormig zijn, en deze zijn gelijkvormig, indien de betrekkingen der drie coördinaten van derzelver punten door gelijkfoortige vergelijkingen worden aangewezen, en voor alle punten is $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$.

De leer der gelijkvormige figuren en ligchamen, wordt vooral door de betrekking van hunnen inhoud en door de evenredigheid van de lijnen gewigtig. De volgende ſtellingen wijzen de voornaamſte betrekking aan.

Wanneer twee figuren of ligchamen gelijkvormig zijn, dan ſtaan derzelver overeenkomſtige lijnen, (hetzij zijden, diagonalen, ribben of andere lijnen) *in gelijke rede tot elkander. De inhouden daarentegen van twee gelijkvormige figuren of oppervlakten, ſtaan tot elkander als de vierkanten, en die van twee gelijkvormige ligchamen, als de cuben van hunne overeenkomſtige lijnen.*

Zoo zijn bij voorbeeld van twee gelijkvormige driehoeken de overeenkomſtige zijden tot elkander, als de radiën der cirkels, welke in of rondom dezelve kunnen beſchreven worden, en de inhouden der driehoeken als de vierkanten van deze zijden of radien. Indien beide rondom eene overeenkomſtige zijde draaijen, zullen zij twee gelijkvormige ligchamen beſchrijven, waarvan de inhouden tot elkander ſtaan, als de cuben, en de oppervlakten, als de vierkanten van deze zijden of radien. Indien dus van die twee ligchamen A en a de oppervlakten zijn O, o, de inhouden $\mathcal{J}$, i, de overeenkomſtige zijden of radien van die twee gelijkvormige driehoeken, R en r, dan is $O : o = R^2 : r^2$

$$\mathcal{J} : i = \mathcal{J}^3 : i^3$$

dus ook $O^{\frac{3}{2}} : o^{\frac{3}{2}} = \mathcal{J} : i$

of $O^3 : o^3 = \mathcal{J}^2 : i^2$.

Bij

Bij de twee gelijkvormige ligchamen fig. 29 bl. 237 is $ab : AB = ac : AE$

fig. $abcd$: fig. $ABCD = ab^2 : AB^2 =$ oppervl. $abcdef$: oppervl. $ABCDEF$

en inhoud ligchaam $abcdef$: inhoud ligchaam $ABCDEF = ab^3 : AB^3 =$ oppervl. $abcdef^{\frac{3}{2}}$: oppervl. $ABCDEF^{\frac{3}{2}}$.

VIERDE AFDEELING.

ALGEMEENE BESCHOUWINGEN, WELKE TOT ELK DER VORIGE AFDEELINGEN OF TOT DE GEHEELE MEETKUNDE BEHOOREN.

104.

MEETKUNDIGE AFSTAND IN VERSCHILLENDE BETEEKENIS GENOMEN.

Dewijl de afstand tusschen twee punten door eene regte lijn wordt aangewezen, en deze regte lijn die eigenschap heeft, dat zij de *kleinste* is van alle lijnen, of sommen van lijnen, welke men, als tusschen die twee punten getrokken, zich kan voorstellen, strekt men, in de Meetkunde, de beteekenis van het woord *afstand* verder uit, en verstaat daardoor in het algemeen *die lijn, welke de kleinste is*, zoo als:

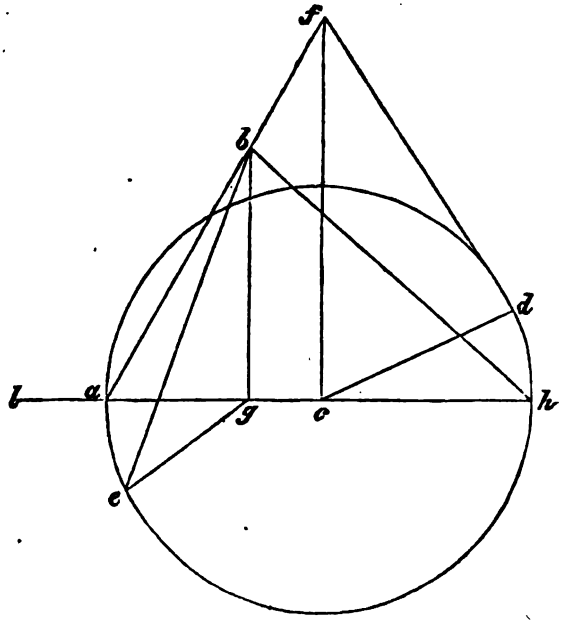
1. *De afſtand van een punt tot eene regte lijn, is die regte lijn, welke uit dat punt loodregt op die lijn getrokken* wordt; want deze is de kleinſte lijn van alle regte en kromme lijnen, welke uit dat punt op die lijn kunnen getrokken worden.

2. *De afſtand van een punt tot een vlak, is de loodlijn, uit dat punt op dat vlak getrokken.* Alle andere lijnen, tuſſchen hetzelve, en dat vlak getrokken, zijn grooter.

Zoo is b. v. fig. 26, bladz. 197, AE de afſtand van het punt A tot het vlak MBC, terwijl AF deszelfs afſtand is van de lijn MB.

3. *De afſtand van het middelpunt van eenen cirkel tot deszelfs omtrek is de radius*, omdat geene grootere, noch kleinere regte lijn uit dit punt tot den omtrek kan getrokken worden. *Deze radius ſtaat op de tangens van het ontmoetingpunt loodregt.*

Fig. 32.



De afſtand van een ander punt, doch in het vlak van den cirkel gelegen, tot den omtrek, is de kleinſte lijn, welke uit dat punt tot den omtrek kan getrokken worden, en dus die lijn, welke een gedeelte van den radius is. Dus zijn (fig. 32) *a l* en *a g* de afſtanden der punten *l* en *g* tot den omtrek, omdat deze lijnen de kleinſte lijnen zijn, welke uit die punten naar den omtrek kunnen getrokken worden. Zij ſtaan ook loodregt op de tangens van het punt *a* der ontmoeting, weshalve wij ook kunnen zeg-

gen, dat deze *afſtand de kleinſte is van de twee lijnen, welke op de tangens van het punt der ontmoeting loodregt uit dat punt kunnen getrokken worden.* Wij zeggen *de kleinste van de twee lijnen*, omdat ook $g\,h$ en $l\,h$ op de tangens van het punt der ontmoeting h loodregt ſtaan, doch tevens de grootſte regte lijnen zijn, welke van de punten g en l naar den omtrek kunnen getrokken worden.

4. Men vindt analoge beſluiten, wanneer men ſtelt, dat het punt b (fig. 32), waarvan de afſtand tot den omtrek van den cirkel gevraagd wordt, *buiten het vlak van den cirkel* is gelegen.

Trek uit b eene loodlijn $b\,g$ op het vlak van den cirkel, trek door g de middellijn $a\,g\,h$, dan is $b\,a$ de kleinſte en $b\,h$ de grootſte regte lijn, welke uit het punt b naar den omtrek kan getrokken worden, terwijl zij beide loodregt ſtaan op de tangenten van a en h of van de uiteinden der middellijn; want trek uit b naar believen eene andere lijn $b\,e$ naar den omtrek, dan is

$b\,a^2 = b\,g^2 + a\,g^2$; $b\,e^2 = b\,g^2 + e\,g^2$; $b\,h^2 = h\,g^2 + b\,g^2$

maar $e\,g$ is grooter dan $a\,g$, en $g\,h$ is grooter dan $e\,g$, dus is $b\,a$ de kleinſte en $b\,h$ de grootſte lijn, doch het verſchil dezer lijnen is des te kleiner, hoe meer het punt g nadert tot het middelpunt c. Valt hetzelve in c, dan zijn dezelve gelijk. Indien dus het punt b in de loodlijn $f\,c$ valt, dan zijn al de lijnen, uit hetzelve tot den omtrek getrokken, aan

el-

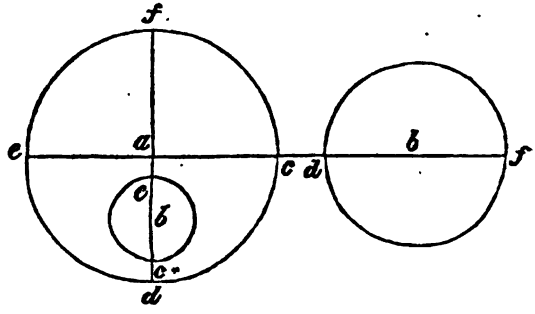
elkander gelijk, en ſtaan loodregt op de tangenten der ontmoetingpunten, zoo als $fa=fd=fh=fe$ enz. Wanneer wij ab verlengen, tot dat zij de loodlijn cf in f ontmoet, dan kan af beſchouwd worden als de lijn, welke, gelijk de radius van den cirkel, door hare ronddraaijing den cirkel beſchrijft, van welke lijn dus ab een gedeelte is.

Wij kunnen dus overeenkomſtig met N°. 3 de volgende bepaling geven.

De afſtand van een punt buiten het vlak van den cirkel gelegen, tot den omtrek, is de kleinſte lijn van de twee lijnen, welke uit hetzelve op de tangenten van twee ontmoetingpunten loodregt kunnen getrokken zijn, en is dus een gedeelte der lijn af, welke, voor zoo verre door hare ronddraaijing de cirkel beſchreven wordt, en zij op de tangenten van alle ontmoetingpunten loodregt ſtaat, als radius van den cirkel kan beſchouwd worden. *Indien dus het punt valt in de loodlijn, welke door het middelpunt gaat, zijn al deze lijnen, even als de radiën van eenen cirkel, aan elkander gelijk.*

Fig.

Fig. 33.



5. *Afſtand der omtrekken van twee cirkels wordt bepaald door de lijn a b* (fig. 33) *of derzelver verlengde, welke hunne middenpunten a en b vereenigt, en is dat gedeelte derzelver (c d), hetgene zich tusſchen de twee naast gelegen randen bevindt,* omdat dit de kleinſte lijn is, welke twee punten van den omtrek vereenigt, terwijl het andere gedeelte *e f* de grootſte zoodanige lijn is. Beide lijnen *c d* en *e f* ſtaan op de tangenten van hare uiteinden loodregt, en dus zijn de vier tangenten bij *e, c, d, f* evenwijdig.

De omtrekken van cirkels, die hetzelfde middelpunt hebben, en in hetzelfde vlak gelegen zijn, hebben dus overal denzelfden afſtand, welke gelijk is aan het verſchil hunner radiën. Zij zijn dus evenwijdig.

6. Op de oppervlakte der globe, op welke men geene regte lijnen kan trekken, noemt men *afſtand tusſchen twee punten den hoek, gevormd aan het middenpunt der globe door lijnen, uit die twee punten derwaarts getrokken.* Deze hoek wordt gemeten door den boog van eenen groo-

grooten cirkel tusschen die twee punten getrokken, *weshalve ook deze boog de afstand genoemd wordt.* Zoo is b. v. fig. 27 bl. 219 afstand der punten *A* en *P* de hoek *A m P* of de boog *A P*. Ook hier ziet men het charakteristiek kenteeken van afstand, omdat deze boog kleiner is, dan elke boog van eenen kleinen cirkel, die door de twee punten gaat. Wanneer namelijk door twee punten cirkelbogen met verschillende radien getrokken worden, dan nadert die boog het meest tot eene regte lijn, en is dus de kleinste, welke met den grootsten radius is beschreven.

Even zoo noemt men op eene globe, afstand van een punt tot eenen cirkel den boog van eenen grooten cirkel, welke op dien cirkel, loodregt staat, omdat elk andere boog van eenen grooten of kleinen cirkel, tusschen dat punt en dien cirkel getrokken, grooter is. Zoo is b. v. fig. 27, bl. 219 de afstand van het punt *P* tot den kleinen cirkel *D G d* de boog *P D* of *P G*, welke is de boog van eenen grooten cirkel, en loodregt staat op den kleinen cirkel.

De afstand van twee evenwijdige cirkels der globe zoo als fig. 27 van *B E b* en *D G d is de lijn cc'*, *welke de middenpunten van die cirkels vereenigt;* want deze lijn staat loodregt op beide vlakken, en is dus de kleinste lijn, welke tusschen dezelve kan getrokken worden. Deze afstand wordt insgelijks aangewezen door bogen van groote cirkels, welke op dezelve loodregt staan, zoo als door $DB = GE = bd$; zoodat alsdan

de

de afſtand van twee evenwijdige cirkels dezelfde is als die van hunne omtrekken.

7. In deze beteekenisſen kan men dus zeggen: *evenwijdige lijnen en evenwijdige vlakken hebben overal denzelfden afſtand van elkander;* dat is, de loodlijnen, tusſchen dezelve getrokken, zijn gelijk. *Eene lijn, evenwijdig aan een vlak, ſtaat overal op gelijken afſtand van hetzelve;* dat is, de loodlijnen, uit elk punt der lijn op het vlak getrokken, zijn gelijk. *De omtrekken van evenwijdige cirkels op de oppervlakte der globe hebben overal denzelfden afſtand van elkander;* dat is, de tusſchen beide gelegen cirkelbogen van groote cirkels, welke op beide cirkels loodregt ſtaan, zijn aan elkander gelijk, enz.

105.

AFMETINGEN. (DIMENSIO.)

Men zegt: *een punt heeft geene afmeting, eene lijn heeft één afmeting, een vlak heeft twee, en een ligchaam drie afmetingen.* Hoe ongeſchikt deze benamingen en bepalingen zijn, om daarop als grondſlagen en grondbepalingen, zoo als gewoonlijk geſchiedt, de meetkunde te bouwen, blijkt, wanneer wij den oorſprong derzelve beſchouwen.

Bij het meten is de eerſte voorwaarde, *dat de maat van dezelfde ſoort zij, als de grootheid, welke door dezelve gemeten wordt.*

Een

Een punt is geene grootheid, omdat het geene deelen heeft; dus kan hetzelve niet gemeten worden, en *heeft dus geene afmeting.*

Eene kromme of regte lijn wordt door eene regte lijn gemeten en bepaald, en wordt uitgedrukt door $n\,l$; zijnde l de lengtemaat, en n elk poſitief, hetzij een geheel of gebroken getal. Ditzelfde geldt van eene kromme lijn, want derzelver lengte is gelijk aan de regte lijn, tot welke zij kan uitgeſtrekt worden. *Daarom wordt elke lijn, hetzij kromme of regte lijn, gezegd, ſlechts één afmeting te hebben.*

Tot het meten van regtlijnige figuren, dient in het bijzonder het *vierkant*, welks zijde als *eenheid van lengte* wordt aangenomen. Wanneer van de twee zijden, welke het regthoekig parallelogram inſluiten, de eene zijde m en de andere n zoodanige eenheden heeft, dan bevat het geheele parallelogram een getal van $m\,n$ zoodanige vierkanten. Dewijl dus hier het getal eenheden der eene zijde met het getal eenheden der andere zijde vermenigvuldigd wordt, zegt men, *dat het parallelogram twee afmetingen heeft*; zijnde de eene lijn de eene, de andere lijn de andere afmeting; en waarvan men onverſchillig de eene de lengte, de andere de breedte noemt. Men noemt ook ſomtijds de eene zijde de hoogte.

Dewijl men altijd een regthoekig parallelogram kan vinden, welks inhoud aan den inhoud eener gegevene regtlijnige of kromlijnige platte figuur gelijk is, en dus

dus het meten van deze figuur op het meten van een regthoekig parallelogram kan terug gebragt worden, pleegt men dus aan de platte figuren, ja ook aan het platte vlak zelve, *twee afmetingen* toe te ſchrijven. Hetzelfde geldt van elk krom vlak, of van alle kromvlakkige of zamengeſtelde vlakkige figuren, omdat zij tot platvlakkige figuren kunnen uitgeſtrekt worden.

Tot het meten van ligchamen dient in het bijzonder de *cubus*, welks zijde tot *eenheid van lengte* wordt aangenomen. Wanneer van de drie ribben van een regthoekig parallelopipedum, welke dus regthoekig op elkander ſtaan, de eene m, de tweede n, de derde p eenheden van lengte hebben, dan bevat het geheele parallelopipedum $m\,n\,p$ zoodanige cuben. Dewijl dus, om den inhoud van dat ligchaam te bepalen, de drie getallen m, n, p met elkander moeten vermenigvuldigd worden, zegt men, *dat het parallelopipedum drie afmetingen heeft*, en men noemt de drie ribben, de *lengte*, *breedte* en *dikte*, of ook wel de laatſte *hoogte*, *diepte*; doch het is geheel onverſchillig, aan welke rib de naam van lengte, breedte of dikte gegeven worde. Omdat men voorts een regthoekig parallelopipedum kan vinden, wiens inhoud gelijk is aan den inhoud van een gegeven ligchaam, en men dus het meten van ligchamen tot het meten van een regthoekig parallelopipedum terug kan brengen, *pleegt men aan alle platvlakkige en krom-*

vlak-

vlakkige ligchamen, ja ook aan de geheele ruimte drie afmetingen toe te ſchrijven.

Zoo is b. v. de inhoud van eene globe, waarvan de radius r eenheden bevat, gelijk aan $\frac{4\pi r^3}{3}$; zijnde $\frac{4\pi}{3}$ een ſtandvastig getal; dus in deze inhoud gelijk aan dien van een regthoekig parallelopipedum, waarvan $m = \frac{4\pi}{3}$, r, en $n = p = r$: of dezelve is gelijk aan dien van eenen cubus, waarvan de zijde bevat $\sqrt[3]{\frac{4\pi r^3}{3}}$ zoodanige eenheden.

Door deze of ſoortgelijke beſchouwingen kunnen eerst de begrippen van een, twee, en drie afmetingen, van breedte, dikte, enz. opheldering en naauwkeurigheid ontvangen, en voor het gebruik in de meetkunde geschikt worden. Het is dus geheel verkeerd, om dezelve reeds bij de allereerſte meetkundige bepalingen te gebruiken. Men vergelijke daarenboven, hetgeen daarvan reeds op bladz. 28 en 29 gezegd is. Het voldoet toch niet aan de eiſchen eener wetenſchap, wanneer men in het begin reeds bepalingen, ſtrekkende om het wezen en de natuur van iets aan te wijzen, voordraagt, welke in het vervolg eerst duidelijk en naauwkeurig kunnen voorgeſteld worden. Al wie zulks doet, toont niet te weten, wat tot eene wiskundige bepaling vereischt wordt.

Aanmerking. KLÜGEL geeft in zijn *Lexicon*, bij het woord *Abmeſſung*, deze bepaling: „Afmeting (dimenſio) is eene lijn, volgens welke de uitgebreidheid van „ eene meetkundige grootheid mag gemeten worden. In „ het meetkundig ligchaam kan men door elk punt drie „ lijnen trekken, waarvan elk eene op de andere loodregt ſtaat, en, volgens deze drie lijnen, kan men de „ uitgebreidheid van het ligchaam meten, of zich dezelve ſlechts voorſtellen. Deze drie meting-lijnen noemt „ men in bijzondere opzigten *lengte*, *breedte*, *dikte* of „ *hoogte*. Een ligchaam is dus eene uitgebreidheid van „ drie afmetingen of dimenſiën. Op een plat vlak kan „ men door een punt ſlechts twee op elkander loodregt „ ſtaande lijnen trekken, welke vaak *lengte* en *breedte* „ genoemd worden; op een krom vlak, op dezelfde wijze, door een punt ſlechts twee kromme (of één kromme en één regte) lijnen, die zich ten aanzien der „ ligging van hare rakende lijnen onder eenen regten „ hoek ſnijden. Een vlak is dus eene uitgebreidheid „ van twee afmetingen. Eene regte of kromme lijn is „ eene uitgebreidheid van eene enkele afmeting."

Op deze bepaling zou men kunnen aanmerken:

1.) *Indien afmeting eene lijn is, en een ligchaam eene uitgebreidheid is van drie afmetingen*, enz., gelijk hier gezegd wordt, dan is, volgens deze bepaling, een *ligchaam een uitgebreidheid van drie lijnen, eene figuur van twee lijnen, en eene regte of kromme lijn eene afmeting van één lijn.* Dit is toch eene zonderlinge uitdrukking.

2.) *Afmeting*, wordt gezegd, *is eene lijn, volgens welke de uitgebreidheid van eene meetkundige grootheid mag ge-*

gemeten worden. Wat beteekent hier het woord *volgens?* Bij eene meting zijn twee dingen, het eene, hetwelk gemeten wordt, en het andere, waarmede gemeten wordt. Bij de lijn alleen is *eene lijn* de maat, bij het vlak daarentegen is *een vlak*, bij het ligchaam is *een ligchaam* de maat. Dus kan hier het woord *volgens* niet beteekenen *waardoor*, en nog minder, *op de wijze, op welk.* Wat beteekent dus die bepaling? KLÜGEL ſchijnt het woord *volgens* te nemen in de beteekenis van *door middel, door hulp van.* Maar in die beteekenis is de verklaring met de bepaling in ſtrijd. Eene kromme lijn heeft, volgens zijne bepaling, ſlechts *eene* afmeting, en een krom vlak *twee afmetingen*, maar volgens deze verklaring zou eene kromme lijn van eene enkelvoudige kromming, *twee*, eene kromme lijn van eene dubbele kromming, zoo als ook een krom vlak, *drie* afmetingen hebben, omdat elk punt van de eerste door middel van twee, en elk punt van de twee laatſten door middel van drie coördinaten bepaald wordt. Daarentegen zou niet alleen de omtrek van eenen cirkel, maar ook de cirkel zelf, en de door deszelfs ronddraaijing ontſtane globe ſlechts *eene* afmeting hebben, omdat zij allen door middel van *eene* lijn, namelijk *de middellijn van den cirkel* bepaald worden.

3.) De grootte der drie lijnen, waarvan geſproken is, en welke de afmeting van het ligchaam zullen zijn, hangt niet alleen af van het ligchaam, hetwelk gemeten wordt, maar ook van het punt, door hetwelk zij getrokken worden. Dus zijn de afmetingen van hetzelfde ligchaam verſchillende, naarmate van dat punt. *Hoe kunnen dus deze drie lijnen gezegd worden de uitgebreidheid van het ligchaam te meten.*

Eene geheel andere zaak is, dat elk punt van een ligchaam bepaald wordt door deszelfs drie afſtanden van drie regte lijnen, welke op elkander loodregt ſtaan, dat is, door den afſtand van de gemelde drie loodlijnen, of ook van de drie platte vlakken, welke door die drie loodlijnen gelegd worden. Hierdoor wordt niet de grootte van het ligchaam gemeten, maar de ligging van elk punt van het ligchaam bepaald. Deze twee zeer verſchillende verrigtingen ſchijnt KLÜGEL met elkander verward te hebben, hoewel, gelijk wij reeds opgemerkt hebben, de kromme lijnen en de kromme vlakken, welke twee en drie lijnen ter bepaling der punten noodig hebben, reeds die verſcheidenheid aanwijzen.

Wanneer dus de bepaling van afmeting, welke een zoo ſcherpzinnige, en in zijne bepalingen zoo naauwkeurige Wiskundige, gelijk KLÜGEL was, geeft, klaarheid en naauwkeurigheid mist, dan kan het toch niet goedgekeurd worden, dat in de allereerſte bepalingen der meetkundige voorwerpen, dit begrip, zonder opheldering, als behoorde het tot de oorſpronkelijke voorſtellingen, reeds eene plaats bekleedt.

106.

BETREKKING DER MEETKUNDE TOT DE WISKUNDE.

Van andere voorwerpen, welke niet alleen tot de Meetkunde, maar ook tot de geheele Wiskunde betrek-

trekking hebben, heb ik getracht juiste bepalingen te geven in de door mij uitgegeven twee werken: *Elementa Matheſeos* Pars I. Prolegomena 1831, en *Elementa Arithmeticae purae*, 1834. Het is onnoodig dezelve hier te herhalen of nader te ontwikkelen, en ik zal mij dus alleen daartoe bepalen, om kortelijk in eenige ſtellingen de betrekking aan te wijzen, waarin, naar mijn oordeel, de Meetkunde tot de geheele Wiskunde ſtaat. (Zie bladz. 46.)

1. *Eene grootheid is, welke uit gelijkſoortige deelen is zamengeſteld*, hetzij, dat dezelve wezenlijk door de natuur, of door kunst is voortgebragt, of ſlechts gedacht wordt. De *grootte* (magnitudo) eener grootheid hangt af van het aantal deelen, waaruit zij beſtaat; hare *form* is de wijze, op welke zij zamengeſteld is. Elke grootheid kan vermeerderd of verminderd worden, maar niet al hetgene vermeerderd of verminderd kan worden, is eene grootheid.

2. Het verſtand vergelijkt met hulp der verbeelding twee grootheden met elkander, in het bijzonder, om te bepalen, hoe veel malen de eene in de andere bevat zij; waartoe dus behoort, dat dezelve gelijkſoortig zijn. Die grootheid, welke met al de grootheden van dezelfde ſoort op die wijze vergeleken wordt, heet de *gemeenſchappelijke maat* of *eenheid*. Deze vergelijking zelve noemt men *meten*, en de grootheid, welke door de gemeenſchappelijke eenheid be-

paald wordt, is de *gemeten* of te *meten* grootheid. (Men zie b. v. bl. 270—273.)

3. Een getal is eene *hoeveelheid van eenheden*, en wanneer dus eene grootheid door een *getal* wordt uitgedrukt, toont dit getal aan, hoe dikwijls de gemeenſchappelijke eenheid of maat daarin bevat zij.

Men kan ook in plaats van de eenheid, een bepaald gedeelte der eenheid nemen, in welk geval het getal een *gebroken getal* genoemd wordt. Deszelfs noemer wijst aan, in hoeveel gelijke deelen de eenheid is verdeeld. Wanneer de grootte van verſchillende grootheden aldus door getallen wordt uitgedrukt, wordt hierdoor bekend de betrekking, of rede, waarin deze tot elkander ſtaan. Deze rede kan dus door een gebroken getal uitgedrukt worden. De gelijkheid van twee reden noemt men *evenredigheid*.

4. *Wiskunde* is de *weteníchap, welke de grootte en form der grootheden onderzoekt*. Het verſtand kan intusſchen de grootte van iets op geene andere wijze bepalen, dan door dezelve te vergelijken met die van eene andere grootheid van dezelfde ſoort. Elke grootte kan dus alleen door het meten bepaald worden. Door getallen worden dus de grootheden en derzelver betrekking, wat de grootte aangaat, aangewezen. Wanneer men een voorwerp *groot* of *klein* noemt, beteekent zulks niets anders, dan dat hetzelve grooter of kleiner zij, dan andere voorwerpen van dezelfde ſoort. Hetgeen op zich zelve groot

of

of klein is, kan niet bepaald worden. In zoo verre onderzoekt de Wiskunde alleen de betrekking der grootheden.

5. *Wiskunde is of zuivere of toegepaste Wiskunde.*

6. De *zuivere Wiskunde* leidt hare ſtellingen niet af uit de ervaring, dat is, uit hetgene de uitwendige zintuigen van de voorwerpen der natuur of der kunst leeren, noch toetst zij dezelve aan de ervaring, om van derzelver waarheid overtuiging te ontvangen. Zij volgt de natuur en de wetten van het verſtand en van de verbeeldingkracht, en daar tot elke juiste ervaring *hetzelfde* vereischt wordt, kan dus de zuivere Wiskunde nooit in ſtrijd zijn met hetgene de ervaring wezenlijk leert. Indien de practijk met de theorie in ſtrijd is, is dit een bewijs, dat de theorie gebrekkig of onvolledig is, en verbetering noodig heeft.

7. De *toegepaste Wiskunde* is niet anders, dan eene toepaſſing der ſtellingen van de zuivere Wiskunde op de voorwerpen van natuur en kunst, welke wij door de ervaring leeren kennen; op derzelver beweging, veranderingen, werkingen; op den tijd enz.

8. De *zuivere Wiskunde* kunnen wij verdeelen in een *algemeen* en in een *bijzonder* deel. Het algemeene deel bevat zoodanige regels en ſtellingen, welke van alle ſoorten van grootheden gelden, en wij kunnen hetzelve daarom *zuivere getalleer* (Arithmetica pura) noemen.

Een getal kan namelijk zoodanig zijn, dat door hetzelve tevens bepaald wordt de ſoort van eenheid, waarvan het eene zekere hoeveelheid aanwijst, zoo als bij voorbeeld 8 *duimen*. In dit geval heet hetzelve een *benaamd* getal, en de regel of ſtelling, welke door het gebruik en door middel van zoodanige getallen gevonden wordt, kan alleen van die aangewezen ſoort van grootheid gelden, indien eene grootere algemeenheid niet uit andere gronden blijkt. Maar het kan ook een *onbenaamd*, dat is, zoodanig een getal zijn, waarbij de ſoort van eenheid niet bepaald is, zoo als $3+5=8$. Hetgene dus door het gebruik van *onbenaamde* getallen gevonden wordt, moet van elke ſoort van grootheid gelden.

Zoodanige getallen gebruikt de *zuivere getalleer*. Maar zij gaat in hare algemeenheid nog verder. Behalve de bijzondere onbenaamde getallen, welke door bepaalde teekens, ingerigt volgens het tiental-ſtelſel, aangetoond worden, gebruikt zij ook *algemeene getallen* (gewoonlijk aangewezen door letters van het alphabet), in wier plaats elk bijzonder onbenaamd getal kan geſteld worden, zoo als $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$, waar men in plaats van a en b, elk bepaald geheel, of gebroken getal, elke wortel of magt enz. kan ſtellen, zonder dat de gelijkheid ophoudt. De regel of ſtelling dus, welke door het gebruik van die algemeene getallen gevonden wordt, moet

moet ook voor alle bijzondere getallen gelden. Dit gedeelte der getalleer, gewoonlijk *Algebra* genoemd, wijst ons dus algemeene regels aan voor alle getallen. Deze algemeenheid wordt nog grooter bij de leer der functiën, de combinatie-leer enz.

Deze *getalleer* ſtrekt zich dus zeer verre uit. Haar voornaamſte onderzoek en verrigting is:

a. Zij zoekt de bijzondere formen of zamenſtellingen, onder welke zich een gegeven getal kan vertoonen, zoo als onder de form van *ſom*, *verſchil*, *product*, *quotient*, *breuk*, *reek*, *magt*, *wortel*, *functie* enz., en hoe de eene form in de andere kan veranderd worden, terwijl de grootte dezelfde blijft. In het bijzonder tracht zij de overige formen tot die van ſommen, en de meer zaamgeſtelde tot eenvoudigere ſommen terug te brengen. Men noemt deze terugbrenging *bijvoegen*, *aftrekken*, *vermenigvuldigen*, *deelen*, de *wortel trekken*, eene *bepaalde magt vinden*, in *eene reeks veranderen*, den *exponent of lagarithmus* enz. *vinden*. Deze bewerkingen toont zij aan door vergelijkingen, waarvan elk lid hetzelfde getal, doch met verſchillende form of zamenſtelling, aanwijst, zoo als $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, waar hetzelfde getal zich in twee formen vertoont, zijnde de eerſte form die van *magt*, de tweede, die van *ſom*.

b. Zij zoekt de betrekking, waarin onbekende getallen tot bekende ſtaan, toont dezelve aan door

vergelijkingen, en hoe door middel van deze vergelijkingen de onbekende getallen door de bekenden kunnen gevonden worden: zoo als $(3+x)(3-x) = 6x-7$. Deze vergelijkingen verſchillen dus wezenlijk van de eerstgemelden, want $(3+x)(3-x) = 9-x^2$ is wezenlijk verſcheiden van $(3+x)(3-x) = 6x-7$. Het tweede lid der eerſte vergelijking volgt uit het eerſte, weshalve voor x elk getal kan geſteld worden. Maar het tweede lid der tweede vergelijking volgt geenszins uit het eerſte, weshalve hier x ſlechts twee bepaalde waardijen heeft, die van -8 en $+2$, welke door de oplosſing der vergelijking gevonden worden.

c. Zij zoekt de betrekking, waarin veranderlijke grootheden benevens derzelver veranderingen tot elkander ſtaan, en toont zulks aan door de vergelijkingen der tweede ſoort (*b*), zoo als $3x+2y=7$ dus $x = \frac{7-2y}{3}$ en $y = \frac{7-3x}{2}$ en, indien $\Delta x, \Delta y$ de veranderingen van x en y aanwijzen, is $\Delta x = -\frac{2}{3}\Delta y$. Dit geſchiedt in de leer der *functien*, waarvan de differentiaal-integraal-, de variatie-rekening enz. bijzondere deelen zijn.

9. Het tweede deel der zuivere Wiskunde, is hetgene wij *zuivere Meetkunde* noemen. Terwijl de beſluiten, regels en ſtellingen der getalleer op alle ſoorten van grootheden kunnen toegepast worden, bepaalt zich de Meetkunde alleen tot die vier ſoorten van grootheid, welke wij, zonder de bijzondere aanwijzing der er-

ervaring, nader kunnen leeren kennen, gelijk het voorbeeld van blindgeborene aanwijst. Deze vier ſoorten zijn *lijnen*, *hoeken*, *figuren* en *ligchamen*. Hieruit volgt, dat de Meetkunde de getalleer niet kan miſſen. Hetgene men de *hoogere Meetkunde* of hoogere *Wiskunde* noemt, is eene toepaſſing der getalleer op de Meetkunde.

10. Men ziet, dat de *getalleer* geheel ſteunt op het begrip van *grootheid*, of zamenſtelling van gelijkſoortige deelen; waaruit afgeleid worden de begrippen van *meten*, *getallen*, *rede*, *evenredigheid* enz. De Meetkunde daarentegen ſteunt op de begrippen van *rigting* en *afſtand*, waaruit andere begrippen, zoo als van lijnen, hoeken, vlakken, figuren, ligchamen afgeleid worden. De drie begrippen *grootheid*, *afſtand* en *rigting zijn dus de grondbegrippen der geheele zuivere Wiskunde*, uit welke men moet trachten de overigen af te leiden.

11. Beide wetenſchappen, de *getalleer* en de *Meetkunde* onderzoeken dus de grootheden (4). Bij de getalleer hangt de grootte af van het getal, of de hoeveelheid van eenheden, en de vorm hangt af van de zamenſtellingen, welke door die verrigtingen van het verſtand geſchieden, welke wij gemeld hebben, namelijk door optellen, aftrekken, enz., en welke alle berusten op het begrip van *tellen*. In de Meetkunde hangt de grootte af van den afſtand der punten, en dus van lij-

lijnen, en de form van de rigting, en dus van hoeken.

12. De deelen der *toegepaste Wiskunde* zijn verſchillende, naar mate van de voorwerpen der natuur, en der kunst, waarop zij worden toegepast. Hiertoe behoort:

1. De *toegepaste getalleer* (*Arithmetica practica*), waarin benaamde getallen voorkomen, en waar dus de algemeene getalleer wordt toegepast op alle ſoorten van grootheden, in het dagelijksch leven voorkomende, zoo als op *maten* en *gewigten*, *tijd*, *geld*, *alle voorwerpen des handels*, *de graden van waarſchijnlijkheid* enz.

2. *Toegepaste* of *practiſche Meetkunde*, waar afſtanden, oppervlakte, inhoud van voorwerpen op de aarde, deelen van de oppervlakte van den aardbol enz. gemeten en bepaald worden.

3. *De leer van de beweging en het evenwigt van vaste*, *vloeibare*, *en luchtvormige ligchamen*, waar bij de meetkundige begrippen nog dat van den *tijd* gevoegd wordt, door welke bijvoeging het betrekkelijk begrip van *ſnelheid* ontſtaat. Ook gebruikt men hier het begrip van *kragt*, omdat elke verandering eene oorzaak moet hebben. Intuſſchen daar dezelve in de Wiskundige beſchouwing gelijk aan hare werking geſteld wordt, is deze hier niet als eene nieuwe bijzondere ſoort van grootheid te beſchouwen. Hiertoe behoort ook de *Starrekunde*, voor zoo verre zij de ware beweging der hemelligchamen verklaart.

4.

4. Eene vierde toepasſing ziet men in de bepaling en verklaring der werkingen van de zoogenoemde *imponderabilia*, of der voorwerpen zonder zwaarte. Hiertoe behoort de leer van de werking van het *licht* zoo op de ligchamen in het algemeen, als op het orgaan van het gezigt, waartoe dus ook *de leer van de ſchijnbare beweging en grootte* gerekend wordt — de leer van de werking der *warmte*, van het *magnetismus*, de *electriciteit* en het *galvanismus*, waardoor ook de Wiskunde eenen toegang verkrijgt in het gebied der Scheikunde.

5. Ook is de hulp en toepasſing der Wiskunde niet gering in het uitgebreide gedeelte der kunst, welke men de *Technologie* noemt, hetwelk zich bepaalt tot de vervaardiging en het gebruik van werktuigen, gebouwen, ſchepen, vestingen, enz.

BIJVOEGSELEN EN EENIGE DRUKFOUTEN.

bl. 6, reg. 2 v. ond. *wijzing* lees: *wijziging*.
32, » 7 » *voorstellingen* lees: *voorstellingen*.
49, » 11 *eene punt* lees: *een punt*.
79, » 9 *vereenigd* lees: *vereenigt*.
80, » 11 en 12 *BM, BCMA* lees: *Bm, BCmA*.
» » 18 *diagonolen* lees: *diagonalen*.
86, » 7 v. ond. *os* lees: *of*.
87, » 8 » Wanneer lees: 2. Wanneer.
98, » 14 *oneindig gedeelte* lees: *eindig gedeelte*.
105, » 1 PM^2+PN^2 lees: Pm^2+Pn^2

en $y^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ lees: $y^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$

» » 4 hier moet voor y het teeken = geplaatst worden.
111, » 15 *diagonaals*. Voeg er bij (bl. 86).
120, » 12 *AS* lees: *As*.
124, » 15 *wien* lees: *wiens*.
125, » 2 *en b* lees: *de waarde van b, dat is van*
135, » 11 tangens is *GA*, voeg er bij (fig. 19).
137, » 20 deze stelling, voeg er bij: *van* EUCLIDES.
148, » 9 van ond. *op dezelve wijze* lees: *op dezelfde wijze*.
157, » 19 *niet noodig*. Voeg er bij, *of liever, men kan bij elken bijzonderen hoek de rigting door de eene lijn aangewezen, als de oorspronkelijke beschouwen.*

Ook van den afstand geldt, dat dezelve eerst door vergelijking met eenen anderen afstand bepaald wordt (zie bl. 50). *Ja wij kunnen geenen afstand naauwkeurig waarnemen, of ons denzelven voorstellen, zonder eene vergelijking met andere afstanden, al is het dan ook slechts eene vergelijking met deszelfs deelen.*

bl. 160, reg. 8 v. ond. *lijn gaat.* Voeg er bij (zie bl. 132).

166, » 7 *lijnen of vlakken.* Voeg er bij (*waartoe dus ook de diagonaal-lijnen en diagonaal-vlakken behooren*).

169, » 6 *lijnen* voeg er bij: *en diagonalen.*
In de figuur staat *BB* moet zijn *BB'*

170, » 3 *Ae* op *AE* voeg er bij: *Ae* op *AC* en *Ad* op *AD.*

172, » 7 *G≅e* lees: *C≅c.*

174, » 7 *l.ABC* lees: *l.BAC.*

178, » 9 *Y die van punt* lees: *Y' die van het punt.*

180, » 13 en *q≅q'.* Voeg er bij: *Omgekeerd, indien q≅q' en men stelt x'≅mx, dan is y'≅my en de lijnen zijn gelijkvormig.*

192, » 5 *de rigtingen er* lees: *de rigtingen.*

193, » 12 *aangenomen worden.* Voeg er bij: MATTHIAS (Leitfaden für einen heuristischeSchulunterricht, 5e uitgaaf 1830, bl. 187) geeft daarvan deze rede, omdat die hoek de kleinste is, welken twee lijnen in de twee vlakken getrokken met elkander in de doorsnede kunnen maken. Dit komt zeker overeen met hetgene wij bl. 263—270 van de verschillende beteekenissen van het woord *afstand* gezegd hebben, als waardoor altijd de kortste lijn wordt aangewezen, — doch als voldoende grond kan toch deze rede niet beschouwd worden.

198, » 4 *de lijn EH* voeg er bij: (zijnde niet het verlengde van *ED*).

» » 3 v. ond. *tang. C* lees: *tang. c.*

202, » 2 *samestellende* lees: *samenstellende.*

206, » 13 *ligchamen* voeg er bij: (zie blads. 213, 214.

209, » 12 *word* lees: *wordt.*

212, » 14 *rigtig* lees: *rigting.*

223, » 12 *Pp* lees *PP'.*

258, » 1 platvakkig. Voeg er bij: gelijksoortige.

261, » 2 v. ond. *alle.* Voeg er bij: overeenkomstige.

262, » 3 » *J3*: *i3* lees: *R3*; *r3.*

Bij den Uitgever dezes zijn mede gedrukt en te bekomen:

BLEEKRODE, (L.) Beschrijving van den Sterren-Hemel, Onderrigt om de Sterrenbeelden te leeren kennen, door eigen oefening. Uit het Hoogduitsch vertaald door A. DE WIT; met eene voorrede en eenige aanmerkingen voorzien door G. MOLL, met 3 Platen. Nieuw omgewerkt en zeer vermeerderd door F. KAISER, *Observator aan de Hoogeschool te Leyden*. kl. 8vo. 1830. . . . . *f* 2,40

GALL, (H. A.) de Wereldgeschiedenis beknopt voorgesteld in tijdrekenkundige Tafelen, tot onderwijs en eigenbeoefening. Naar het Hoogduitsch vrij vertaald, zeer vermeerderd en tot op onzen tijd voortgezet. 2de druk, vermeerderd door Prof. H. G. VAN KAMPEN. gr. 4to. 1837. . . . *f* 1,20

HOFFMAN, (K. J. V.) De Aarde en hare Bewoners, omgewerkt, vermeerderd en verbeterd door J. VAN WIJK, Rz., te Kampen. Met Platen, Kaarten en Tabellen. gr. 8vo. 1835—1840, in 10 stukken. . . . . *f* 14,—

HOGENDORP, (C. S. W. Grave VAN) Ridder der Orde van den Nederl. Leeuw en van het Legioen van Eer, voormaals Resident van Batavia. Beschouwing der Nederlandsche Bezittingen in Oost-Indië. Uit het Fransch vertaald door J. OLIVIER, JZ., vermeerderd met eene inleiding en vele aanteekeningen van den Auteur. Met kaart en plaat, karton. gr. 8vo. 1833. . . . . *f* 5,90

LIEUWE, (L.) Handboek der Zeevaartkunde, met 125 Afbeeldingen. gr. 8vo. in karton geb. . . . . *f* 5,40

LITTROW, (J. J.) Hoogleeraar te Weenen. Beschouwing van de Kometen in het algemeen en van de vier voornaamste in het bijzonder. Naar het Hoogduitsch gevolgd en met vele ophelderende Aanteekeningen verrijkt. Met eene plaat. 8vo. 1833. . . . . *f* 2,40

LOBATTO, (M.) Mémoire sur la Théorie des Caractéristiques employées dans l'analyse mathémathique. 4to. . *f* 6,25

MOLL. (G.) Geschiedkundig onderzoek naar de eerste uitvinding der Verrekijkers. 4to. . . . . *f* 4,—

——— en M. VAN REES, over waarnemingen der Getijën langs de Nederlandsche Kusten, 4to, met uitslaande tabellen, 1838. . . . . *f* 1,80

OBREEN, (H. A. VAN DER SPECK) Hanleiding tot de kennis van het beschouwende gedeelte der Scheepsbouwkunde, in gr. 4to. met een Atlas en platen in gr. Folio. 1830. *f* 10,—

QUETELET, (A.) Volks-Sterrekunde, uit het Fransch, door G. HEERTS, met platen. 12mo. . . . . *f*60,—

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

1915